# Haces de $\mathcal{O}_X$-modulos: (Sheaves)

**Def:** Sea $X$ una variedad algebraica. Un sheaf de $\mathcal{O}_X$-modulos

Es una asignación:

(a) $F(U)$ — $\mathcal{O}_X(U)$ modulo para cada abierto $U \subseteq X$

(b) Para cada inclusión $W \subseteq U$ $\quad \rho_W^U : F(U) \longrightarrow F(W)$

un homomorfismo de $\mathcal{O}_X$-modulos

$$\left( \rho_W^U(f\vec{s}) = \boxed{\rho_W^U(f)}\, \rho_W^U(\vec{s}) \right)$$

Restricción de $\mathcal{O}_X$

$f \in \mathcal{O}_X(U)$

$\vec{s} \in F(U)$

Que satisfacen el axioma de haces (sheaf axiom)

$\forall \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ $\forall\, s_\alpha \in F(U_\alpha)$: $\quad \rho^{U_\alpha}_{U_\alpha \cap U_\beta}(s_\alpha) = \rho^{U_\beta}_{U_\alpha \cap U_\beta}(s_\beta)$

$\exists!\ s \in F\left(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha\right)$:

**Def:** Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son sheaves de $\mathcal{O}_X$-módulos un morfismo $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ es una colección de mapas $\varphi(U): \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ compatibles con las restricciones

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi(U)"] \arrow[d, "{}_{\mathcal{F}}\rho^U_W"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "{}_{\mathcal{G}}\rho^U_W"] \\ \mathcal{F}(W) \arrow[r, "\varphi(W)"'] & \mathcal{G}(W) \end{tikzcd}$$

**Obs:** Si $U \subseteq X$ es abierto y $\mathcal{F}$ es sheaf en $X$ podemos definir $\mathcal{F}|_U$. "$\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son localmente isomorfos"

**Ejemplo 1:** Si $\pi : V \longrightarrow X$ es un haz vectorial $/X$

definimos $F(U) = \{ s : U \xrightarrow[\text{regular}]{} V \ : \ \pi \circ s = id \}$

si $W \subseteq U$ hay una restricción $\rho^U_W : F(U) \longrightarrow F(W)$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Demuestra que $F$ es un sheaf de $\mathcal{O}_X$-módulos localmente isomorfo a $\mathcal{O}_X^r$

**Ejemplo 2:** Si $D \subseteq X$ es un divisor de Weil y $X$ normal

$$\mathcal{O}_X[D](U) = \{ f \in \mathbb{C}(X) : \begin{array}{l} f = 0 \text{ ó } f \neq 0 \text{ y} \\ (div(f) + D)|_U \geq 0 \end{array} \}$$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ (a) Demuestra que si $D$ es de Cartier entonces $\mathcal{O}_X[D]$ es localmente isomorfo a $\mathcal{O}_X$

(b) Demuestra que si $D$ es primo entonces

$$\mathcal{O}_X[-D](U) = \{ f \in \mathcal{O}_X(U) : f|_D = 0 \}$$

**Teorema:** Sea $\sigma \in \Delta$ un cono puntudo. Entonces

① Todo divisor de Cartier T-invariante en $U_\sigma$ es $\mathrm{div}(\chi^m)$, $m \in M$.

② $\mathrm{Pic}(U_\sigma) = 0$.

**Lema:** Si $D$ es un divisor efectivo T-invariante en $U_\sigma$ entonces

$$\underbrace{\mathcal{O}_X[-D](U_\sigma)}_{\text{es un Ideal T-invariante } I} \subseteq \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$$

Dem: (Suponiendo que $\sigma$ es full-dimensional)

Sea $D$ un divisor efectivo, $T$-estable y de Cartier y sea $p \in U_\sigma$ el punto distinguido (el punto fijo, que es común a todos los divisores)

Como $D$ es de Cartier $\exists$ $W$ abierto con $p \in W$ tal que $D_{|W} = \operatorname{div}(f)_{|W}$ para $f \in \mathbb{C}(X)^*$

Como $D$ es efectivo $f$ es regular en el abierto $W$

$W \supseteq \Lambda \ni p$ $\quad$ $f = \frac{g}{h^s}$ y $\operatorname{div}(f)_{|\Lambda} = \operatorname{div}(g)_{|\Lambda}$ (con $g$ regular pues $h$ es unidad en $W$)

abierto básico $\operatorname{Spec}(R_h)$

podemos tomarlas regulares en $U_\sigma$

Cómo $g$ es regular globalmente tenemos

$$\operatorname{div}(g) = D + E \geq 0$$

$$\Rightarrow g \in \mathcal{O}_X[-D](X) = I$$

así que existen complejos $a_i$ y caracteres $\chi^{m_i}$: $\operatorname{div}(\chi^{m_i}) + D \geq 0$

$$g = a_1 \chi^{m_1} + \dots + a_s \chi^{m_s}.$$

De lo anterior $\operatorname{div}\left(\frac{x^{m_i}}{g}\right) \geq 0$ en $\Lambda$ $\left[\operatorname{div}(x^{m_i})\big|_\Lambda + D\big|_\Lambda \geq 0_\Lambda\right]$ ⑥

así que $\frac{x^{m_i}}{g}$ son regulares en $p$. más aún de la igualdad $1 = \sum a_i \frac{x^{m_i}}{g}$ evaluada en $p$ $\exists\, j$ : $\frac{x^{m_j}}{g}(p) \neq 0$

luego hay un abierto $\Gamma$ en el que $\operatorname{div}\left(\frac{x^{m_j}}{g}\right) = 0$,

es decir

$$\operatorname{div}(x^{m_i})\big|_\Gamma = \operatorname{div}(g)\big|_\Gamma = D\big|_\Gamma$$

pero como $p \in \Gamma$ esto asegura la igualdad $\operatorname{div}(x^{m_i}) = D$ pues ambos divisores tienen ~~una~~ soporte en $\bigcup_{\rho \in \Delta(1)} D_\rho$. y las multiplicidades de esos divisores se pueden ver en $U_\sigma$.