Divisores de Cartier en variedades tóricas:

Def: $D \in Div(X)$ es un divisor de Cartier si es localmente principal
$\exists \{U_i\}_i$ cubierta de X por abiertos, $f_i \in \mathbb{C}(X)$:
$\forall i \left[D_{|U_i} = div(f_i)_{|U_i} \right]$

Def: $Pic(X) := \dfrac{CaDiv(X)}{PDiv(X)}$

$Pic(X) \subseteq Cl(X)$

Pregunta: ¿Cómo son los divisores de Cartier en una variedad tórica?

Obs: Para entender qué divisores son de Cartier podemos usar primero equivalencia lineal

Ejercicio: Demuestra que D de Cartier y $D \sim E$ implica E es de Cartier

Consecuencia: ~~Como~~ En una variedad tórica todo divisor D es linealmente equivalente a un divisor toro-estable, es decir a uno de la forma

$$D = \underbrace{\sum_{\rho \in \Delta(1)} c_\rho D_\rho}$$

donde los $D_\rho := V(\rho)$ con $\overbrace{\rho \in \Delta(1)}$

Conos 1-dimensionales en Δ

Pregunta: ¿Qué divisores así son de Cartier?

$CDiv_T(X(\Delta)) \subseteq Div_T(X(\Delta))$

Teorema: [Si sabemos $CDiv_T(X(\Delta))$ tenemos $Pic(X(\Delta))$]

$$M \longrightarrow CDiv_T(X(\Delta)) \longrightarrow Pic(X(\Delta)) \longrightarrow 0$$

Dem: Dos divisores de Cartier T-estables son linealmente equivalentes ssi su diferencia es el divisor de un caracter (porque esto es verdad para divisores de Weil).

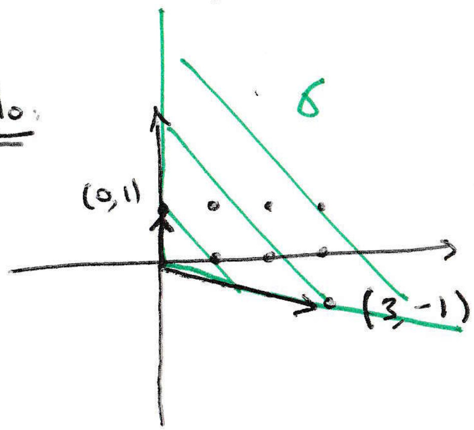
Cómo es $CDiv_T(X(\Delta))$?

Teorema: Sea $\sigma \subseteq N$ un cono puntudo. Entonces:

(i) Todo divisor de Cartier T-estable es el divisor de un caracter

(ii) $Pic(U_\sigma) = 0$

Ejemplo:

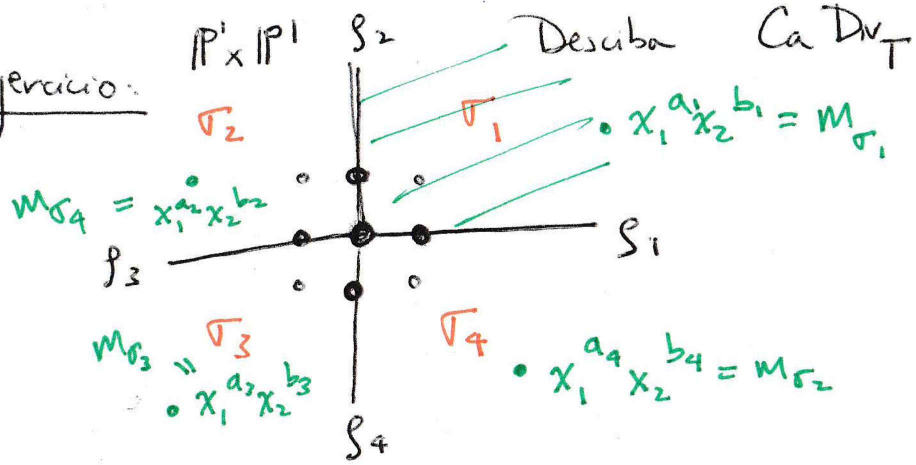


$Cl(U_\sigma) \neq Pic(U_\sigma)$

$$\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \mathbb{Z}^2 \longrightarrow Cl(X) \longrightarrow 0$$

$Cl(X) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \neq 0$

Ejercicio: $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ Describa $\mathrm{CaDiv}_T(X)$.



$$M \longrightarrow \mathrm{Div}_T(X')$$

$$\begin{array}{c} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

En
$$U_{\sigma_1} \quad \mathrm{div}(x_1^{a_1}x_2^{b_1})\big|_{U_{\sigma_1}} = a_1 D_{\rho_1} + b_1 D_{\rho_2}$$
$$U_{\sigma_2} \quad \mathrm{div}(x_1^{a_2}x_2^{b_2})\big|_{U_{\sigma_2}} = -a_2 D_{\rho_3} + b_2 D_{\rho_2}$$
$$U_{\sigma_3} \quad \mathrm{div}(x_1^{a_3}x_2^{b_3})\big|_{U_{\sigma_3}} = -a_3 D_{\rho_3} + -b_3 D_{\rho_4}$$
$$U_{\sigma_4} \quad \mathrm{div}(x_1^{a_4}x_2^{b_4})\big|_{U_{\sigma_3}} = a_4 D_{\rho_1} + -b_4 (D_{\rho_4})$$

$$\begin{array}{cc} a_1 & b_4 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{array}$$

Obs: Un caracter χ^m determina una función lineal en σ_i
mediante $u \longmapsto \langle m, u \rangle$. en los vectores
los coeficientes del divisor son los valores de esa función.
u_{ρ_i}. Como la función es lineal esta determinada por sus valores
en los rayos extremales de σ_i.
adicionalmente la función toma valores enteros en N

Def: Sea Δ un abanico poliedral N-racional

(1) $|\Delta| = \bigcup_{\sigma\in\Delta} \sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$

Una función $\varphi : |\Delta| \longrightarrow \mathbb{R}$ es "de soporte" si

φ es lineal en cada cono de σ.

(2) φ es entera si $\varphi(|\Delta| \cap N) \subseteq \mathbb{Z}$.

$\boxed{\text{Teorema:}}$ Hay una biyección entre

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Funciones de soporte} \\ \text{enteras en } |\Delta| \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Divisores de Cartier} \\ \text{T-estables en} \\ X(\Delta) \end{array} \right\}$$

$$SF(\Delta, N) \longleftarrow CaDiv_T(X(\Delta))$$

(i) Para cada cono maximal σ sea $m_\sigma \in M$ tal que $\operatorname{div}(\chi^{m_\sigma})|_{U_\sigma} = D|_{U_\sigma}$ $\longleftarrow$ $D = \sum_{\rho\in\Delta(1)} a_\rho D_\rho$

(ii) Define

$\varphi : |\Delta| \longrightarrow \mathbb{R}$

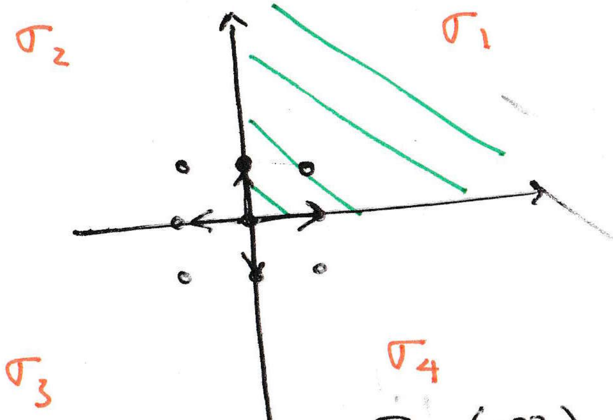
$u \longmapsto \langle m_\sigma, u\rangle$ si $u \in U_\sigma$.

$$\varphi \longrightarrow \sum_{\rho\in\Delta(1)} -\varphi(u_\rho) D_\rho.$$

Ejemplo: Calcule $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$

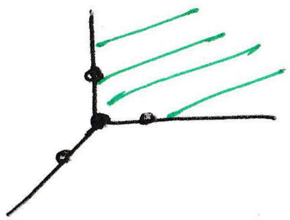
$$M \longrightarrow \mathrm{CaDiv}_T(X(\Delta)) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \to 0$$

$$SF(\Delta, N) \Big/ \left(\begin{array}{c}\text{Funciones}\\ \text{lineales}\end{array}\right)$$



$\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) =$

Calcule $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^2)$



$\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^2) =$

Teorema: Si $\mathcal{O}_{X,p}$ es un DFU $\forall p \in X$ entonces

$$\mathrm{CaDiv}(X) = \mathrm{Div}(X)$$

y en particular $\mathrm{Cl}(X) \cong \mathrm{Pic}(X)$.

Ejercicio: Demuestre el Teorema.

Hecho (difícil seme) Si X no singular $\Rightarrow \mathcal{O}_{X,p}$ es UFD $\forall p \in X$ así que $\mathrm{Pic}(X)$ y $\mathrm{Cl}(X)$ coinciden.