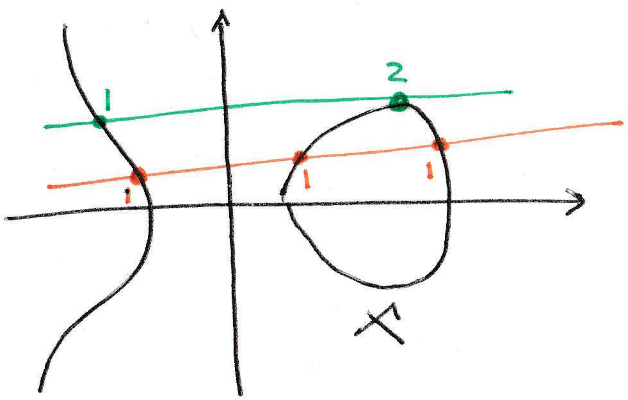
Divisores en variedades normales:

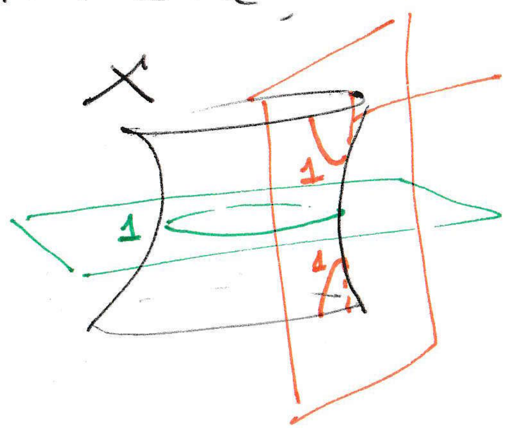
Sea X una variedad irreducible y normal
(i.e. $\forall p \in X$ $\mathcal{O}_{X,p}$ es integralmente cerrado ó equiv. si existen abiertos $\{U_i\}_{i\in I}$
con $\bigcup U_i = X$ y $\mathcal{O}_X(U_i)$ int cerrado $\forall i$) ← Ejercicio (demostrar equivalencia)

Def: Un divisor primo en X es una subvariedad irreducible cerrada
$$D \subseteq X \quad \text{con} \quad \underbrace{\dim(D) = \dim(X) - 1}_{\text{de codimensión } 1.}$$

Def: $\mathrm{Div}(X) = \mathbb{Z}$-modulo libre generado por los divisores primos $D \subseteq X$

Un divisor de Weil W es un elemento de $\mathrm{Div}(X)$
$$W = a_1 D_1 + \dots + a_k D_k, \quad a_i \in \mathbb{Z}.$$





Si $f \in \mathbb{C}(X)$ y $D \subseteq X$ es un divisor primo entonces, (por la clase anterior) sabemos que la normalidad de X implica que el anillo $\mathcal{O}_{X,D}$ es normal y al ser local y 1-dimensional $\Rightarrow$ $\mathcal{O}_{X,D}$ es un DVR.

Es decir existe $\nu_D : \mathbb{C}(X)^* \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ valuación con

$$\mathcal{O}_{X,D} = \{ f \in \mathbb{C}(X)^* : \nu_D(f) \geq 0 \}.$$

$\boxed{\text{Def:}}$ Si $f \in \mathbb{C}(X)^*$ podemos definir el orden de desvanecimiento de f en D $\nu_D(f)$. Eso permite definir

$$\mathrm{div}(f) = \underbrace{\sum_{\substack{D \subset X \\ \mathrm{codim}(D,X)=1}} \nu_D(f) D}_{} \in \mathrm{Div}(X)$$

Los divisores de funciones racionales se llaman "PRINCIPALES".

$$\mathrm{PDiv}(X) := \{ \mathrm{div}(f) : f \in \mathbb{C}(X)^* \} \leq \mathrm{Div}(X)$$

Divisores Principales

Divisores principales:

Obs: $f \in \mathbb{C}(X)^*$ $\quad \nu_D(f) = 0 \quad \forall\, D$ salvo por finitos.

Dem: Tome $U \subseteq X$ abierto afín. $\mathbb{C}(X) = Q(\mathcal{O}_X(U))$

así que existe polinomios $\dfrac{p_1(x_1,\dots,x_n)}{q_1(x_1,\dots,x_n)} = f$

X

$U\#$

Si $D \subseteq X \Rightarrow \longrightarrow D \subseteq X \setminus U = F_1 \cup \dots \cup F_k \cup H_1 \dots \cup L_m$

componentes

todas tienen $\dim(F_i) \leq \dim(X) - 1$

con igualdad hay sólo finitas.

$D \in \{F_1, \dots, F_k\}$.

$\searrow D \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$

$$\left.\begin{array}{l} D \not\subseteq V(p_1) \text{ y} \\ D \not\subseteq V(q_1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{p_1}{q_1} \text{ y } \frac{q_1}{p_1} \in \mathcal{O}_{X,D}$$

$$\nu_D(f) = 0$$

Obs: A veces $\quad \nu_D(f) > 0 \quad$ [D es un cero con mult. $\nu_D(f)$]

$\nu_D(f) < 0 \quad$ [D es un polo con mult. $|\nu_D(f)|$].

ambos sólo finitos.

Def: El "Class group" de la variedad X es

$$\boxed{Cl(X) := \frac{\mathrm{Div}(X)}{\mathrm{PDiv}(X)}}$$

"Espacio de clases de equivalencia lineal"

$E, F \in \mathrm{Div}(X)$ son linealmente equivalentes $E \sim F \iff E - F = \mathrm{div}(f)$

Ejercicio: Sean X, Y variedades y $\varphi : X \longrightarrow Y$ un isomorfismo. demuestre que $\mathrm{Pic}(X) \cong \mathrm{Pic}(Y)$.

[Divisores de hiperplano]

Motivación:

Si $X \subseteq \mathbb{P}^n$, un hiperplano de $\mathbb{P}^n$

$H = V(a_0 X_0 + \dots + a_n X_n)$ entonces podemos usar H ← Divisores de hiperplano

para definir un divisor en X, $X \cap H$ así:

(1) Para $i = 0, \dots, n$ definamos una función racional

$$\frac{a_0 X_0 + \dots + a_n X_n}{X_i} = g_i \in \mathcal{O}_X(U_i \cap X) \subseteq \mathbb{C}(X)$$

$\{x \in \mathbb{P}^n : X_i \neq 0\}$.

(2) Si $D \subseteq X$ es un divisor primo $\exists\, i : D \cap U_i \neq \emptyset$

$$\mathrm{div}(H) = \sum_{D \in \mathrm{Div}(X)} \nu_D(g_i)\, D$$

el g_i depende de

Note que el divisor está bien definido porque,

si $D \cap U_i \neq \emptyset$ y $D \cap U_j \neq \emptyset$ entonces tendríamos las dos

opciones g_i y g_j. En $U_i \cap U_j$ note que

(i) $g_i \dfrac{X_i}{X_j} = g_j$

(ii) $\dfrac{X_i}{X_j}$ es una unidad en $\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$

$$\Rightarrow \nu_D(g_j) = \nu_D\left(g_i \left(\tfrac{X_i}{X_j}\right)\right)$$
$$= \nu_D(g_i) + \boxed{\cancel{\nu_D\left(\tfrac{X_i}{X_j}\right)}} \to 0 \text{ p.q. unidad!}$$

Ahora, si tenemos dos hiper-planos H_1 y H_2

entonces

Af: $\boxed{\operatorname{div}(H_1) - \operatorname{div}(H_2) = \operatorname{div}(f)}$ para alguna función racional. $f \in \mathbb{C}(X)^*$

Dem: $f = \dfrac{H_1}{H_2} \in \mathbb{C}(X)^*$

$H_1 = V(a_0X_0 + \dots + a_nX_n)$
$H_2 = V(b_0X_0 + \dots + b_nX_n)$

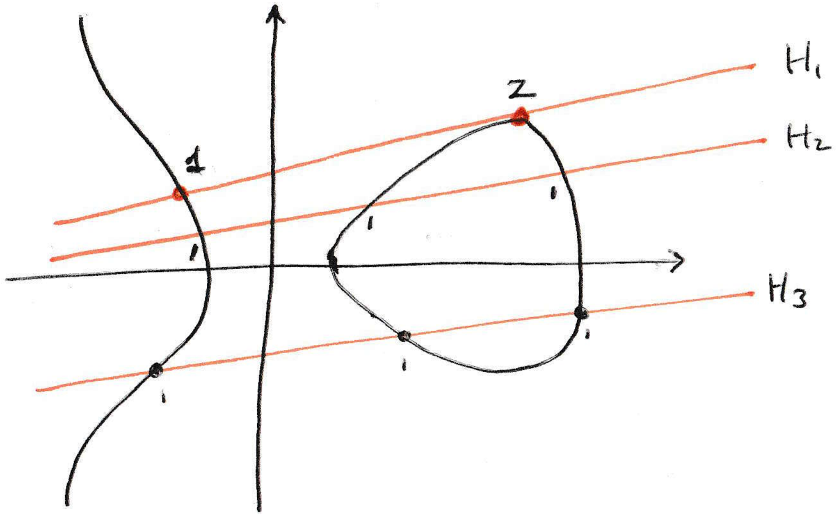
En U_i miraremos a los divisores de hiperplano

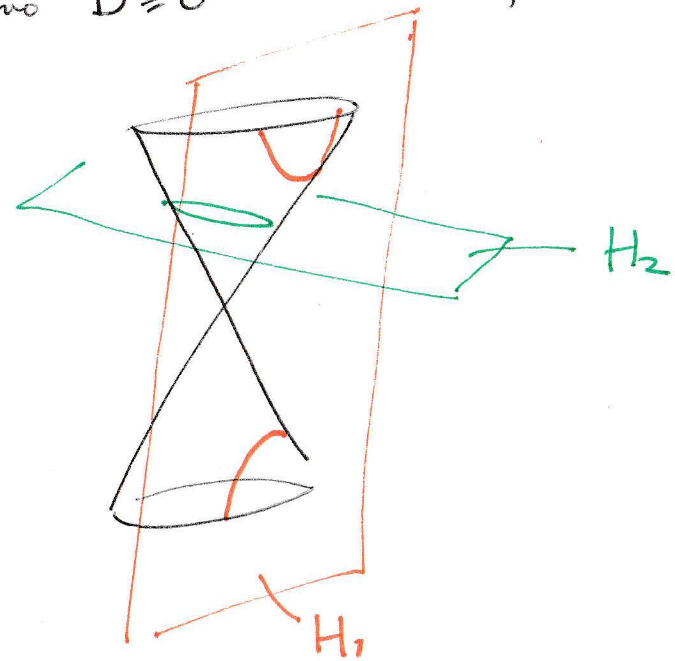
$$f = \frac{a_0X_0 + \dots + a_nX_n}{X_i} \; \frac{X_i}{b_0X_0 + \dots + b_nX_n}$$

$$\nu_D(f) = \nu_D(g_i^{(1)}) - \nu_D(g_i^{(2)})$$

Qué tienen en común los distintos hiperplanos? (R: son lin. equiv.).

El concepto de equivalencia lineal abstrae la idea de ser "secciones de hiperplano distintas del mismo embedding" entre divisores efectivos. ($D \in \mathrm{Div}(X)$ es efectivo $D \geq 0$ si todos los coefs son ≥ 0).





Cómo se calcula el class group? $Cl(X)$?

En general tenemos dos maneras:

<u>Teorema:</u> Si X es afín y $\mathcal{O}_X(X)$ es un DFU entonces:

(1) X es normal

(2) Todo divisor $D \subseteq X$ es principal y en particular $Cl(X) = 0$.

<u>Teorema:</u> Si X es normal y, $U \subseteq X$ es un abierto irreducible y $D_1, \dots, D_s$ son las componentes de $X \setminus U$ que son divisores primos entonces tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$\bigoplus_{j=1}^{s} \mathbb{Z} D_j \longrightarrow Cl(X) \xrightarrow{\text{restricción}} Cl(U) \longrightarrow 0$$

$$\sum a_j D_j \longmapsto \left[\sum a_j D_j\right]$$

$\boxed{\text{Ejemplo.}}$ Determine $Cl(\mathbb{P}^n)$

POR FAVOR DETENGA EL VIDEO Y CALCÚLELO UD MISM@...

Ejemplo: Cómo se usan los dos Teoremas?

$$\boxed{Cl(\mathbb{P}^n) = ?}$$

Sea H un hiper-plano $\quad U = \mathbb{P}^n \setminus H \cong \mathbb{A}^n$

[$\mathbb{A}^n$ es afín y $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(\mathbb{A}^n) = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ UFD así que $Cl(U) = 0$] Teo 1.

$$\mathbb{Z}H \longrightarrow Cl(\mathbb{P}^n) \longrightarrow Cl(U) \longrightarrow 0, \qquad Cl(U) = 0$$

por exactitud

$$Cl(\mathbb{P}^n) = \langle [H] \rangle$$

Si tuviera torsión $\exists\, a \in \mathbb{Z} : a > 0 \quad [aH] = [0]$

$aH = \mathrm{div}(f) \Rightarrow f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mathbb{P}^n) \Rightarrow \mathrm{div}(f) = 0$ y $a = 0 \Rightarrow \boxed{Cl(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}}$

Lemma: Si X es normal y $f \in \mathbb{C}(X)^*$ entonces:

$$\mathrm{div}(f) \geq 0 \iff f \in \mathcal{O}_X(X)$$

$$\mathrm{div}(f) = 0 \iff f \in \mathcal{U}(\mathcal{O}_X(X)) =: \mathcal{O}_X(X)^*$$

Ejercicio: Prop. 4.0.16 [CLS]