El class group de una variedad tórica:

Recuerde que, si $X = X(\Delta)$ donde Δ es un abanico racional en $N_{\mathbb{R}}$ entonces hay una correspondencia entre

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Clausuras de} \\ \text{las orbitas de } T \\ \text{en } X(\Delta) \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \text{Conos } \sigma \in \Delta \right\}$$

co-dimensión $= k$ dimensión $= k$.

En particular los conos 1-dimensionales de Δ corresponden con subvariedades irreducibles de X de codimensión uno. Es decir, cada rayo (cono 1-diml) de Δ determina un divisor en X. Estos divisores son T-estables (es decir $p \in D$ y $t \in T \Rightarrow t \cdot p \in D$) y más aún son los únicos divisores primos T-estables de $X(\Delta)$.

Ejercicio: Demuestre que si $D \subseteq X(\Delta)$ es un divisor primo T-estable $\Rightarrow D = V(\sigma)$ para algún $\sigma \in \Delta$, cono de dimensión 1.

Adicionalmente, tenemos una descripción combinatoria de la clausura de cada órbita

$$\boxed{V(\tau) = \bigsqcup_{\sigma \succeq \tau} O(\sigma)}$$

En particular

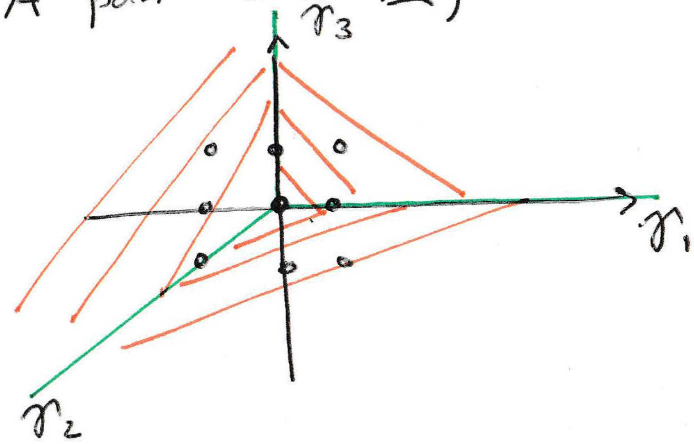
$$X(\Delta) = \overline{T} = V(\underbrace{(0)}_{\text{origen}}) = O(0) \sqcup \bigsqcup_{\substack{\sigma \succeq (0) \\ \sigma \neq (0)}} O(\sigma)$$

$$= T \sqcup \left[\bigsqcup_{\substack{\gamma \\ \gamma \text{ cono } 1\text{-diml}}} \left(\bigsqcup_{\sigma \geq \gamma} O(\sigma) \right) \right] = T \sqcup \bigcup_{\substack{\gamma \in \Delta \\ \gamma\ 1\text{-diml}}} V(\gamma)$$

La variedad $X(\Delta)$ es un toro junto con una colección de divisores "de frontera" determinados por los conos 1-diml Δ.

Ejemplo: ¿Cómo son los divisores primos T-invariantes?

(A partir de Δ)



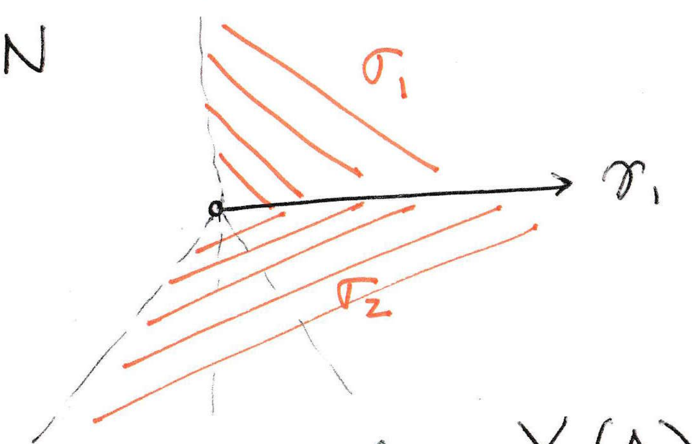
Tenemos tres divisores primos T-invariantes $V(\rho_1)$, $V(\rho_2)$, $V(\rho_3)$.

¿Cómo son? Hay dos respuestas

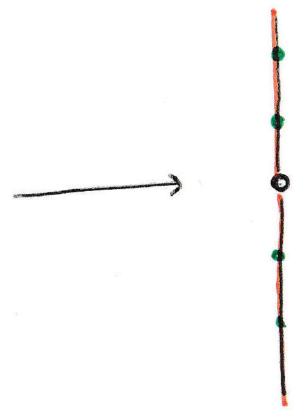
(i) Intrínseca: Qué variedades abstractas son? $V(\rho_1)$

(a) $\mathrm{Star}(\rho_1)$

N



$N(\tau) := N/\langle \rho_1 \rangle_{\mathbb{Z}}$



$\overline{\mathrm{Star}(\rho_1)}$

Del dibujo $V(\rho_1) \cong \mathbb{P}^1$ ✓

(ii) Como subvariedad de $X(\Delta)$: $V(\rho_1)$

Para cada σ $U_\sigma \cap V(\rho_1)$ es cerrado así que está definido por un ideal.

Cuál? $U_{\sigma_1} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y])$ $I(V(\rho_1)) = (x)$ generado por χ^m: $m \in \sigma_1^\vee$, $m \notin \tau^\perp$

$U_{\sigma_2} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[y^{-1}, xy^{-1}])$ $I(V(\rho_1)) = (xy^{-1})$

Lema: El Class group $Cl(X(\Delta))$ esta generado por las clausuras de las órbitas $V(\tau)$: $\tau \in \Delta(1)$ (i.e. por los divisores primos T-estables)

Dem: Sabemos que

Divisores primos

$$X(\Delta) = T \sqcup \bigcup_{\tau \in \Delta(1)} \boxed{V(\tau)}$$

luego

$$\bigoplus_{\tau \in \Delta(1)} \mathbb{Z} \cdot V(\tau) \longrightarrow Cl(X(\Delta)) \longrightarrow Cl(T) \longrightarrow 0$$

Ahora, T es afín y $\mathbb{C}[x_1^{\pm}, \dots, x_n^{\pm}] = \mathcal{O}_T(T)$ es un DFU luego $Cl(T) = 0$. y la exactitud demuestra el resultado.

En particular, el class group de toda variedad tórica es finitamente generado.

Se vuelve natural preguntar cuándo dos combinaciones lineales de divisores primos T-estables son linealmente equivalentes.

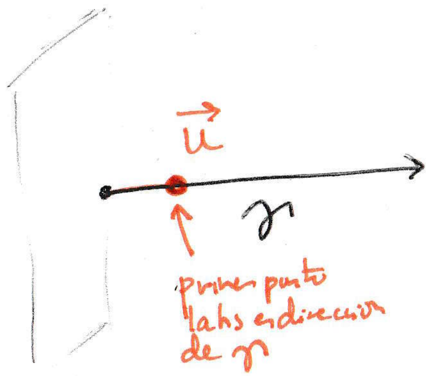
Para empezar analicemos los divisores de los caracteres.

$$\chi^m \in \mathcal{O}_T(T) \subseteq \mathbb{C}(X(\Delta))$$

porque son regulares en un abierto.

$D = V(\rho) \subseteq X(\Delta)$. Cómo calcular $\nu_D(\chi^m)$?

Recuerde que las multiplicidades dependen del anillo local $\mathcal{O}_{X(\Delta), D}$ así que podemos calcularlas localizando en cualquier abierto que intersecte a D. Usemos U_ρ



$$\mathbb{C}[\rho^\vee \cap M] = \mathbb{C}[x, y_1^\pm, \dots, y_{d-1}^\pm]$$

$$\chi^{\vec{m}} = x^{a_1} y_1^{b_1} \cdots y_{d-1}^{b_n}$$

$a_i \geq 0$
$b_i \in \mathbb{Z}$.

en la localización $(\chi^{\vec{m}}) = (x^a)$ así que $a = \nu_D(\chi^m)$

$I(\rho) = (x)$

$$\boxed{a_1 = \langle \vec{m}, \vec{u} \rangle}$$

Cómo calculamos a combinatóricamente?

Receta sencilla:

χ^m ~~∅~~ caracter y cada rayo $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ (cono 1-dim)

tiene un primer vector de la latis $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$

$$\operatorname{div}(\chi^m) = \sum_{i=1}^{p} \langle \vec{m}, \vec{u}_i \rangle \cdot V(\gamma_i)$$

Obs: Si $x_1^{\pm}, \dots, x_m^{\pm}$ son generadores de $\mathcal{O}_T(T)$ entonces

$$\operatorname{div}(x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m}) = a_1 \operatorname{div}(x_1) + \dots + a_m \operatorname{div}(x_m)$$ así que

$$\langle \operatorname{div}(\chi^m) \rangle_{\mathbb{Z}} = \boxed{\langle \operatorname{div}(x_1), \dots, \operatorname{div}(x_m) \rangle_{\mathbb{Z}}}$$

Fácil, pq son finitos.

$$\underbrace{\mathbb{Z}^m}_{M} \longrightarrow \mathbb{Z}^p \longrightarrow Cl(X) \longrightarrow 0$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & m \end{matrix} \\ \begin{matrix} V(\gamma_1) \\ \vdots \\ V(\gamma_p) \end{matrix} & \begin{bmatrix} \text{—} \; u_1 \; \text{—} \\ \vdots \\ \text{—} \; u_p \; \text{—} \end{bmatrix} \end{array}$$

coordenadas de $\vec{u}_i$

¿Son éstas todas las equivalencias lineales entre divisores T_N-estables?

$$\boxed{a_1 V(\tau_1) + \dots + a_p V(\tau_p) = \operatorname{div}(f)}$$

en T $\operatorname{div}(f) = 0 \Rightarrow f \in \mathcal{O}_T(T)^*$

así que $\boxed{f = c\chi^m}$ así que $\operatorname{div}(\chi^m)$ son las únicas equivalencias lineales.

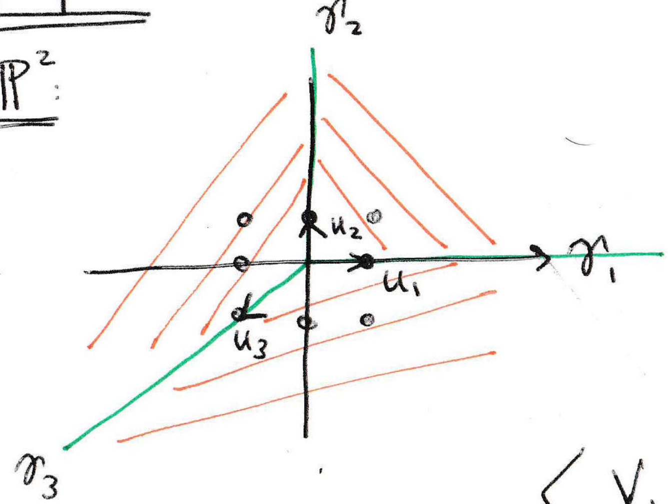
Teorema: Cómo es el class group de una variedad tórica?

$Cl(X(\Delta))$ es isomorfo al siguiente

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Z}^m & \longrightarrow & \mathbb{Z}^p & \longrightarrow & Cl(X(\Delta)) \longrightarrow 0 \\
\| & & \| & & \\
M & \begin{array}{c} \\ V(\tau_1) \\ \vdots \\ V(\tau_p) \end{array}\begin{array}{c} 1 \;\cdots\; m \\ \left[\begin{array}{c} - u_1 - \\ \vdots \\ - u_p - \end{array}\right] \end{array} & \bigoplus_{i=1}^{p} \mathbb{Z} V(\tau_i) & & \\
 & & \operatorname{Div}_T(X(\Delta)) & &
\end{array}$$

Ejemplo: Calcule $Cl(\mathbb{P}^2)$

$\mathbb{P}^2$:

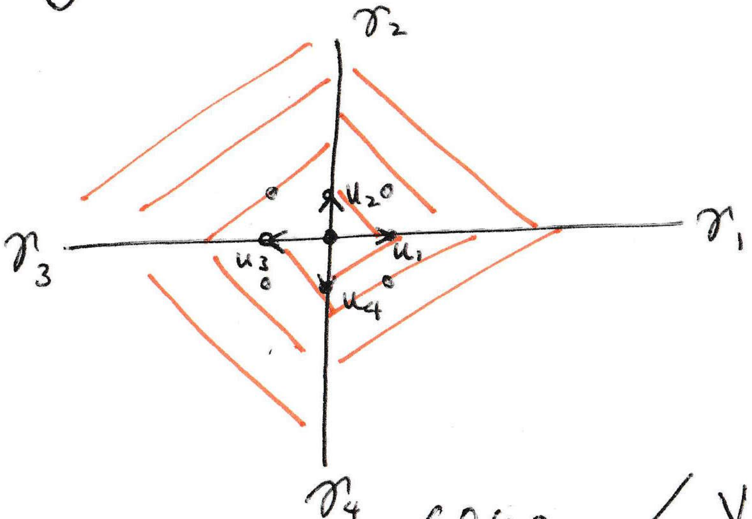


$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z}^2 & & & & & & \\ \wr\!\wr & & & & & & \\ M & \longrightarrow & \mathbb{Z}^3 & \longrightarrow & Cl(X) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} & x_1 & x_2 \\ \hline v_1 & 1 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 \\ v_3 & -1 & -1 \end{array}$$

$$Cl(X) = \left\langle v_1, v_2, v_3 : \begin{array}{l} v_1 - v_3 = 0 \\ v_2 - v_3 = 0 \end{array} \right\rangle \cong \mathbb{Z}\langle v_3 \rangle \cong \mathbb{Z}$$

Ejemplo: Calcule $Cl(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$



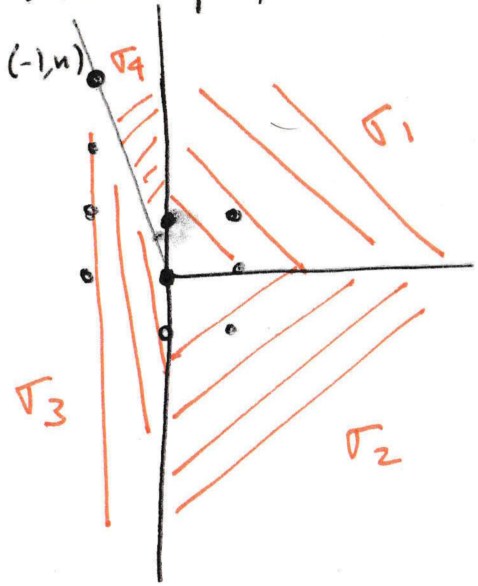
$$M \longrightarrow \mathbb{Z}^4 \longrightarrow Cl(X) \longrightarrow 0$$

$$\begin{array}{c|cc} & x_1 & x_2 \\ \hline v_1 & 1 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 \\ v_3 & -1 & 0 \\ v_4 & 0 & -1 \end{array}$$

$$Cl(X) = \left\langle v_1, v_2, v_3, v_4 : \begin{array}{l} v_1 - v_3 = 0 \\ v_2 - v_4 = 0 \end{array} \right\rangle \cong \mathbb{Z}[v_3] \oplus \mathbb{Z}[v_4] \cong \mathbb{Z}^2$$

En particular $\mathbb{P}^2 \not\cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ (aunque son biracionales, es decir $\mathbb{C}(\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{C}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$)

Ejercicios: (1) La superficie de Hirzebruch $\mathbb{F}_n$ es:



(i) Demuestre que $\mathbb{F}_n$ es no-singular (suave)

(ii) Calcule $Cl(\mathbb{F}_n)$

~~(iii) Demuestre~~

(2) ⓐ Demuestre que si X es una ~~variedad~~ superficie tórica no singular con 3 divisores T-estables $\Rightarrow X \cong \mathbb{P}^2$

ⓑ Demuestre que si X es una ~~variedad~~ superficie tórica no singular con 4 divisores T-estables $\Rightarrow X \cong \mathbb{F}_n$ para algún n.

** (3) Sea X una superficie tórica no singular con $d \geq 5$ divisores T-estables y sean $u_1, \dots, u_d$ sus puntos lattice primitivos.

Demuestre que $\exists j : \quad v_j = v_{j-1} + v_{j+1}$ [Hints pg 44 Fulton]

[Este ejercicio demuestra que "toda superficie tórica no singular se obtiene a partir de $\mathbb{P}^2$ o de algún $\mathbb{F}_n$ mediante finitos blow-ups en puntos fijos de la acción de T].