Anillos de valuación discreta:

Def: Sea k un campo. Una valuación discreta en k es un mapa

$$\nu : k^* \longrightarrow \mathbb{Z}$$ que satisface

(i) ν es SOBRE

(ii) ν es hom de grupos

(iii) $\nu(x+y) \geq \min(\nu(x), \nu(y))$ cuando $x, y, x+y \in k^*$

Def: Si ν es una valuación discreta en k^* definimos el <u>anillo de valuación</u> de ν

$$R := \{ x \in k^* : \nu(x) \geq 0 \} \cup \{0\}.$$

El anillo R tiene propiedades muy especiales, (R es un Discrete Valuation Ring DVR)

Lema: Sea R el DVR de $\nu : k^* \longrightarrow \mathbb{Z}$. Entonces

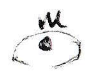
(i) $\mathcal{U}(R) = \{x \in R : \nu(x) = 0\}$

(ii) $\mathfrak{m} = \{x \in R : \nu(x) > 0\} \subset R$ es el único ideal maximal de R

(iii) R es un DIP, $\mathfrak{m} = (z)$ y todo ideal es (z^k)

(iv) R es Noetheriano

(v) $\mathrm{Spec}(R) = \begin{array}{c} \mathfrak{m} \\ | \\ \{0\} \end{array}$



Ejemplo:

$$\nu : \mathbb{C}(x)^* \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$\frac{f}{g} \longmapsto \text{“orden de desvanecimiento de } \frac{f}{g} \text{ en } 0\text{”}$$

Esto es lo que las valuaciones miden.

$$R_\nu = \mathbb{C}[x]_{(x)}$$

localización en el complemento del ideal primo (x).

* **Teorema:** Si R es local noetheriano con $\dim(R) = 1$ entonces

$$R \text{ es normal} \iff R \text{ es un DVR}.$$

Dem del Lema:

(i) $x \in k^* \Rightarrow x^{-1} \in k^*$

$\nu(xx^{-1}) = \nu(1) = \nu(1 \cdot 1) = \nu(1) + \nu(1) \Rightarrow \nu(xx^{-1}) = 0$

$\boxed{\nu(x) + \nu(x^{-1}) = 0}$ así que $\nu(x) = 0$ ssi $\nu(x^{-1}) = 0$ (a) ✓

(ii) $r \in R$, $r \notin m \Rightarrow \nu(r) = 0 \Rightarrow r \in \mathcal{U}(R)$

$s \in R$ $r_1, r_2 \in m \Rightarrow \nu(r_1 s + r_2) \geq \min(\nu(r_1) + \nu(s), \nu(r_2)) > 0$

así que m es ideal maximal.

(iii) Sea $I \subseteq R$ un ideal, $t = \min\{n \in \mathbb{N} : x^n \in I\}$, $(x^t) \subseteq I$

$x \in R : \nu(x) = 1$ (existe por sobreyectividad)

$h \in I$, $h \notin (x^t)$

$\nu(h) = j$

$\nu(hx^{-j}) = 0 \Rightarrow hx^{-j} = u$

$h = ux^j$, $j < t \Rightarrow$ ⊠

(iv) Si todo ideal es principal R es noeth

(v) $\mathrm{Spec}(R) = \{ (x^j) : (x^j) \text{ es primo} \}$

$j = 0, 1$

$R \subseteq k^*$ — dominio

$m = (x)$ es maximal.

✓

Lema: Sea R un dominio noetheriano, normal y sea $\mathfrak{p} \subseteq R$ un ideal primo de codimensión uno. Entonces $R_{\mathfrak{p}}$ es un DVR.

Dem:

Ejemplo: Sea X una variedad normal y $D \subseteq X$ un divisor (subvariedad irreducible de codimensión 1).

El anillo $\boxed{\mathcal{O}_{X,D} \text{ es un DVR.}}$

Ejercicio:

$$\mathcal{O}_{X,D} = \left\{ (U,f) : \begin{array}{l} U \subseteq X \text{ abierto}, \ U \cap Y \neq \emptyset \\ f \in \mathcal{O}_X(U) \end{array} \right\} \Big/ \sim$$

$(U_1,f_1) \sim (U_2,f_2) \Leftrightarrow f_1 = f_2$ en $U_1 \cap U_2$.

(a) $\mathcal{O}_{X,D}$ es un anillo local, con campo residual $K(Y)$ y $\dim(\mathcal{O}_{X,D}) = \dim(X) - \dim(D)$

(b) Si $V \subseteq X$ es abierto afín y $D \cap V = V(\mathfrak{p})$ en $\mathcal{O}_V(V)$ R/m entonces $\mathcal{O}_{X,D} \cong R_{\mathfrak{p}}$ con $R = \mathcal{O}_V(V)$.

Dem del Teo:

"$\Leftarrow$" Si R es un DVR $\Rightarrow$ R es un DIP $\Rightarrow$ DFU $\Rightarrow$ R es integralmente cerrado en $Q(R)$ ✓

"$\Rightarrow$" Difícil, va en varios pasos.

$\boxed{\text{Lema:}}$ Si R es local, uno-dimensional y $\mathfrak{m} = (x)$ ← el maximal es principal

$\Rightarrow R$ es un DVR

Por Nakayama como R es noetheriano

$$\dim_{R/\mathfrak{m}}\left(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\right) = \text{"mínimo número de generadores de } \mathfrak{m}\text{"}$$

así que $\dim_{R/\mathfrak{m}}\left(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\right) = 1$ luego $\mathfrak{m} \neq (0)$, $\mathfrak{m}^2 \neq \mathfrak{m}$.

tome $t \in \mathfrak{m}\setminus\mathfrak{m}^2$ $t + \mathfrak{m}^2$ genera $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ y $\mathfrak{m} = (t)$

$$\forall x \in R\setminus\{0\} \left(\underset{u \in U(R)}{\exists}\; x = ut^n \right) \leftarrow *$$

* Así se calcula la valuación.

$x \notin \mathfrak{m} \longrightarrow x = u$

$x \xrightarrow{\in \mathfrak{m}} x = t x'$ $\quad x' \xrightarrow{\notin \mathfrak{m}} u$

$x' \xrightarrow{\in \mathfrak{m}} x' = t x'' \longrightarrow x = t^2 x''$

$(x) \subseteq (x') \subseteq \dots \subseteq (x^{(k)})$ así que para!

así que los ideales primos son $(0), (t)$

$$\left.\begin{array}{ccc} k^* = Q(R)^* & \xrightarrow{\nu} & \mathbb{Z} \\ \dfrac{t^n u_1}{t^s u_2} & \longmapsto & n - s \end{array}\right\} \text{valuación.}$$

Lema: R dominio local noetheriano, uno-diml e integralmente cerrado
$\Rightarrow \mathfrak{m} = (t)$ [el maximal es principal]

Sea $F = Q(R)$

$$S = \{ y \in F : y\mathfrak{m} \subseteq R \}$$

$$\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}S \subseteq R$$

R-ideal generado por xy $x \in \mathfrak{m}$, $y \in S$

(1) Si $\mathfrak{m}S = R \Rightarrow 1 = \sum x_i y_i$ $x_i \in \mathfrak{m}$, $y_i \in S$

• $\exists$ $x_j y_j \notin \mathfrak{m}$ (dlc $1 \in \mathfrak{m}$), así que $x_j y_j \in U(R)$

$x := \dfrac{x_j}{x_j y_j}$, $y = \dfrac{y_j}{x_j y_j}$ luego $\boxed{xy = 1 \quad x \in \mathfrak{m}, y \in S}$

$z \in \mathfrak{m}$ $z = 1 \cdot z = x(yz) \Rightarrow \boxed{(x) = \mathfrak{m}}$ ✓

(2) Si $\mathfrak{m}S = \mathfrak{m}$ entonces $\forall \lambda \in S$ $\boxed{\lambda \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}}$

Si $m_1, \ldots, m_k$ son generadores de $\mathfrak{m}$

$$M_\lambda = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_k \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_k \end{bmatrix}$$

so λ is a root of the monic char poly de A en $F \overset{\text{int cerrado.}}{\Rightarrow} \lambda \in R$

luego $S \subseteq R$

Sea $x \in m \setminus \{0\}$, localizamos R en $(x^n) : n \in \mathbb{N}$

Af: $R_x = Q(R)$ [$R \to R_x$ — campo, dle. $q \in \mathrm{Spec}(R_x)$ $q \neq (0)$

$R \to Q(R)$, $R_x \to Q(R)$

$q \cap R \supsetneq (0)$ primo. $\neq m$ pq x es unidad en R_x luego $x \notin q$.

contradice la dimensión de R.]

Fijo $z \in m \setminus \{0\}$

$\frac{1}{z} \in Q(R) = R_x \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{y}{x^n}$ $\left(\begin{array}{c} \forall x \in m \setminus \{0\} \\ \exists n \in \mathbb{N} : x^n = yz \end{array} \right)$

$\Rightarrow m^n \subseteq (z)$ para alguna n

Sea $n_0 = \min \{ n \in \mathbb{N} : m^n \subseteq (z) \}$.

$n_0 = 1$ ✓

$n_0 > 1$ $\quad m^{n_0 - 1} \not\subseteq (z)$

tome $y \in m^{n_0-1}$, $y \notin (z)$ $\boxtimes$

$ym \subseteq (z) \Rightarrow \frac{y}{z} m \in R$

$\Rightarrow \frac{y}{z} \in S \Rightarrow \frac{y}{z} \in R \Rightarrow y = \left(\frac{y}{z}\right) z$

$y \in (z)$