Teorema: Sea R un anillo local noetheriano con $\dim(R)=1$

R es un DVR $\iff$ R es normal (int. cerrado en $k:=Q(R)$)

Dem: "$\Rightarrow$" R DVR $\Rightarrow$ todo ideal $I \subseteq R$ es $I=(x^k)$ donde x es cualquier generador de m $\Rightarrow$ R es un DIP $\Rightarrow$ R es DFU $\Rightarrow$ R es normal.

"$\Leftarrow$" **Lema:** R normal $\Rightarrow \exists\, x \in R$ $m=(x)$

Idea: Cómo encontrar el generador del maximal?

tome $a \neq 0$, $a \in m$ $\quad (a)=(x^k)$ para algún k

$m^{k-1} \not\subseteq (x^{k-1}) \not\subseteq (a) \qquad b \in \overset{m^{k-1}}{(x^{k-1})} \setminus (a)$

$b = x^{k-1}u \qquad \boxed{x^* = \frac{a}{b}} = \frac{x^k u'}{x^{k-1}u} = x\underbrace{\frac{u'}{u}}_{\text{gen. del ideal}} \in R$

$(x^*)=m$

Tome $a\neq 0$, $a \in m$

$(0) \subsetneq (a) \subseteq m$ pq $\dim(R)=1$

$\mathrm{rad}(a)=m$, como R noeth

$\exists\, n: \quad m^n \subseteq (a) \subseteq m$

Sea $n=\min\{n\in\mathbb{N}: m^n\subseteq (a)\}$

$m^{n-1} \not\subseteq (a)$

$\exists\, b \in m^{n-1}$, $b \notin (a)$

$b \in m^{n-1}$
$bm \in m^n \subseteq (a)$
$\frac{b}{a}m \subseteq R$

$\boxed{x := \frac{a}{b}} \in k$ Af: $x \in R$ y $(x)=m$

Mostremos que $\frac{1}{x}(m)=R$ $\Leftarrow$ $m^n \subseteq (a) \subseteq m$, $\frac{b}{a}m \subseteq R$

Dem: Si $\boxed{\frac{1}{x}m \neq R}$ $\quad \frac{1}{x}m \subseteq m$

Si $\frac{1}{x}m \subseteq m \Rightarrow \frac{1}{x}$ es entero sobre R

y por lo tanto $\frac{1}{x} \in R$ $\leftarrow$ R integralmente cerrado.

pero $\frac{1}{x}=\frac{b}{a}$ luego $b=\left(\frac{b}{a}\right)a$ $\boxtimes$

$b \in (a)$

$\boxed{\frac{1}{x}m=R} \Rightarrow \boxed{m=(x)}$

Teorema (Cayley-Hamilton)

Sea M un A-mod f.g. y sea $\Phi: M \to M$ un hom de A-mods. Entonces Φ satisface

$$\Phi^n + a_1\Phi^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\Phi + a_n I_d = 0$$

Aplicación: m es un R-mod f.g.

$\Phi: m \longrightarrow m$
$a \longmapsto \frac{1}{x}\cdot a$

Así que

$$\Phi^n + a_1 \Phi^{n-1} + \cdots + a_1 \Phi + a_0 = 0$$

$$\left[\left(\frac{1}{x}\right)^n + a_1\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{1}{x}\right) + a_0\right] \cdot p = 0 \quad \forall p \in m$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^n + a_1\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{1}{x}\right) + a_0 = 0 \in k$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} \in R$$

R local, 1-dim, noeth y $m = (x)$

Af: $\forall z \in R \left(\exists\, u \in U(R),\ k \in \mathbb{N} : \underbrace{z = u x^k}\right)$

$z \in R \longrightarrow z \in U(R)$ ✓

$\searrow z \in m$

$z = z_2 \cdot x \longrightarrow z_2 \in U(R)$ ✓ $z = x u$

$\searrow z_2 \notin U(R)$

$z_2 \in m$ $\quad z_2 = z_3 x$

$z = z_3 x^2 \longrightarrow$

$\searrow \ldots$

$(z) \subseteq (z_2) \subseteq (z_3) \subseteq \ldots$

termina $\boxed{z = u x^k}$

Los ideales de R son (x^k)

$I = (z_1, \ldots, z_k) = (u_1 x^{k_1}, \ldots, u_k x^{k_k}) = (x^s)$

$$\left.\begin{array}{l} \nu : Q(R) \longrightarrow \mathbb{Z} \\ \nu\left(\frac{p}{q}\right) \longmapsto a-b \end{array}\right]$$ R es un DVR ✓

$p \in R \qquad p = u x^a$

$q \in R, q \neq 0 \qquad q = u' x^b$

$\frac{p}{q} = x^{a-b} u''$