Ejemplos de Pegamento:

Construcción de $\mathbb{P}^1$:

Tenemos dos ~~abiertos~~ afines

$$U_0 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x]) \cong \mathbb{C}$$

$$U_1 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[y]) \cong \mathbb{C}$$

Cada afín tiene 2 abiertos:

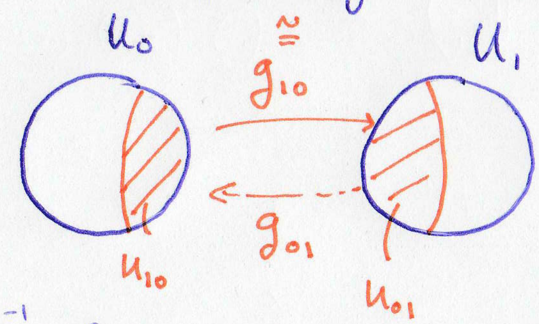
$$U_{00} = U_0$$

$$U_{10} = U_0 \setminus \{x=0\} \cong \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x]_x)$$

$$U_{11} = U_1$$

$$U_{01} = U_1 \setminus \{y=0\} \cong \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[y]_y)$$

Y los abiertos tienen isomorfismos dados:



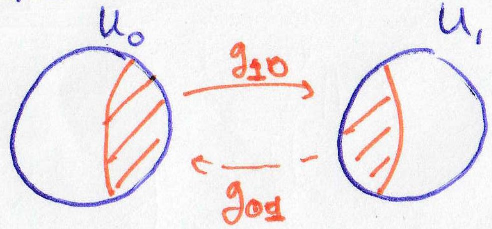
$$g_{00} = \mathrm{id}_{U_{00}}, \quad g_{11} = \mathrm{id}_{U_{11}}$$

$$\left.\begin{aligned} g_{10} : U_{10} &\longrightarrow U_{01} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} \\[1em] g_{01} : U_{01} &\longrightarrow U_{10} \\ y &\longmapsto \frac{1}{y} \end{aligned}\right] \; g_{10}^{-1} = g_{01}$$

$$\mathbb{P}^1 = \boxed{\left(U_0 \sqcup U_1 / \sim \, , \, \mathcal{O}_X \right) = X}$$

usamos pegamento y construimos un nuevo espacio

Ejemplo: Calculemos las secciones regulares globales en $\mathbb{P}^1$



$$\{(p(x), q(y)),\ \begin{array}{l} p\in\mathbb{C}[x] \\ q\in\mathbb{C}[y] \end{array}\}$$

apuntes → (1)

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1) \subseteq \mathcal{O}_{U_0}(U_0) \oplus \mathcal{O}_{U_1}(U_1) = \{(s_0, s_1),\ s_i \in \mathcal{O}_{U_i}(U_i)\}$$

Queríamos que

$$\boxed{\rho^{U_0}_{U_{10}}(p(x)) \circ g_{01} = \rho^{U_1}_{U_{01}}(q(y))}$$

$$p\left(\frac{1}{y}\right) = q(y) \quad \text{en} \quad \mathbb{C}[y]_y$$

así que p y q deben ser constantes!

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1) =$$

Ejercicio:

Con U_0, U_1, U_{10}, U_{01} como en el slide anterior defina

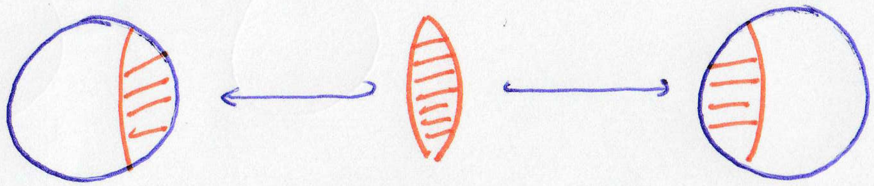
$$g_{10} : \begin{array}{ccc} U_{10} & \longrightarrow & U_{01} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

$$g_{01} : \begin{array}{ccc} U_{01} & \longrightarrow & U_{10} \\ y & \longmapsto & y \end{array}$$

y sea X la variedad que obtiene mediante pegamento.

Es $X \cong \mathbb{P}^1$? Demuestre su respuesta.

Podemos simplificar esa descripción un poco?

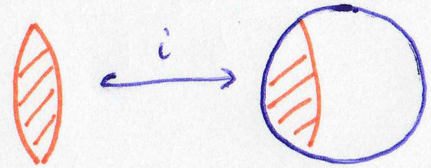


Pasamos a nivel de álgebas:

$$\boxed{\mathbb{C}[z^{-1}] \longrightarrow \mathbb{C}[z,z^{-1}] \longleftarrow \mathbb{C}[z]}$$

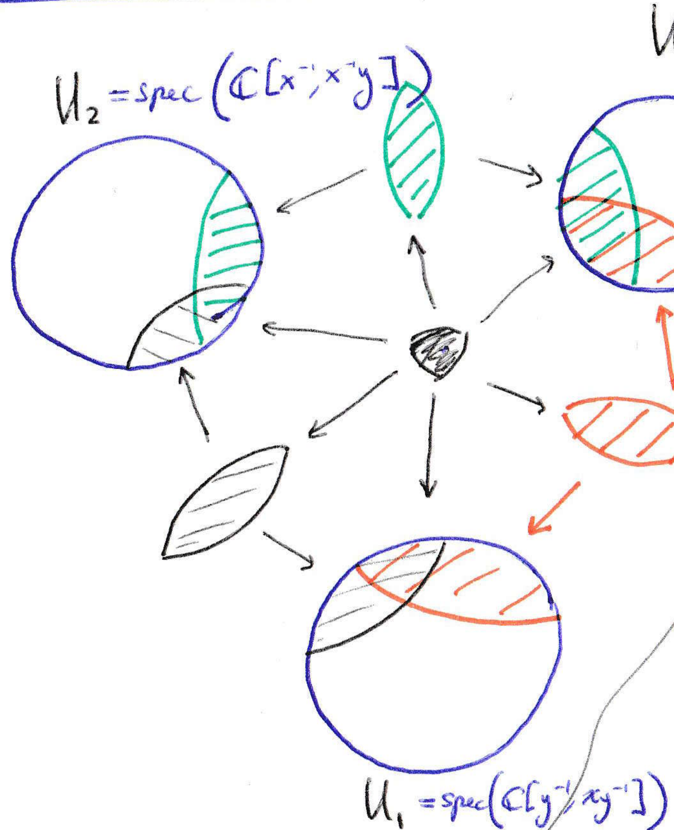
sospechosamente parecidos...

IMPORTANTE:



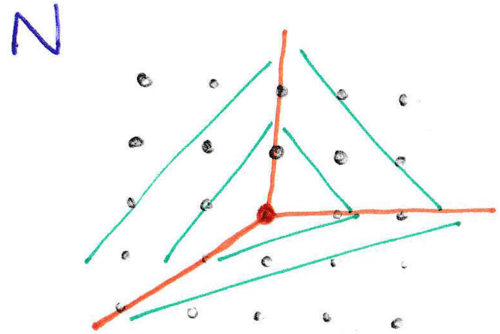
$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}[z,z^{-1}] & \mathbb{C}[z] \arrow[l] \arrow[d] \\ & \mathbb{C}[z]_z \arrow[ul, dashed, "i^*"] \end{tikzcd}$$

Construcción de $\mathbb{P}^2$: mediante pegamento.



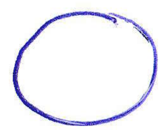
$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{C}[x^{-1}, x^{-1}y] \arrow[r] \arrow[dd] & \mathbb{C}[x, x^{-1}, y] \arrow[d] & \mathbb{C}[x,y] \arrow[l] \arrow[d] \\
& \mathbb{C}[x^{\pm}, y^{\pm}] & \mathbb{C}[x, y, y^{-1}] \arrow[l] \\
\mathbb{C}[xy^{-1}, x^{-1}y, y^{-1}] \arrow[ur] & & \mathbb{C}[y^{-1}, xy^{-1}] \arrow[ll] \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

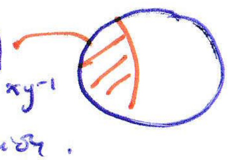
Sospechosamente parecido a ...



Note que cada uno de los mapas

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{C}[xy^{-1}, x^{-1}y, y^{-1}] & \mathbb{C}[y^{-1}, xy^{-1}] \arrow[l] \arrow[d] \\
& \mathbb{C}[y^{-1}, xy^{-1}]_{xy^{-1}} \arrow[ul, "i^*", "\cong"']
\end{tikzcd}
$$





se vuelve un isomorfismo en la localización.

Ejercicio:

Demuestra que la variedad X del slide anterior es isomorfa a $\mathbb{P}^2$ [Ver Kempf Sección 1.6 para la definición clásica de $\mathbb{P}^2$]

(La propiedad universal puede ayudar).