¿Cómo interpretar el abanico Δ geométricamente?

Δ consiste de conos $\sigma \subseteq N$. Cada $u \in N$ corresponde a un subgrupo uniparamétrico de T (explícitamente, si $N \cong \mathbb{Z}^k$

$u = (a_1, \dots, a_k)$, $\lambda_u : \mathbb{C}^* \xrightarrow{\lambda_u} (\mathbb{C}^*)^k = T$

$t \longmapsto (t^{a_1}, \dots, t^{a_k})$)

Recuerde que $z^m \in M$ $\quad z^m(\lambda(u)) = t^{\langle m, u \rangle}$. Esto tiene las siguientes consecuencias claves:

[INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA de Δ]

Lema: Sea $|\Delta| \subseteq N$ la unión de los conos en Δ.

(1) Si $u \in |\Delta|$ $\lim_{t \to 0} \lambda_u(t)$ existe en $X(\Delta)$. Más aún si τ es el cono de Δ que contiene a u en su interior relativo $\Rightarrow$ $\lim_{t \to 0} \lambda_u(t) = x_\tau$.

(2) Si $u \notin |\Delta|$ entonces $\lim_{t \to 0} \lambda_u(t)$ NO EXISTE en $X(\Delta)$.

Dem: ① Suponga que u pertenece al interior relativo de σ

para $\vec{m} \in \sigma^\vee \cap M$ calculamos $z^{\vec{m}}(\lambda_u(t)) = t^{\langle \vec{u}, \vec{m} \rangle}$

como $\langle \vec{u}, \vec{m} \rangle \geq 0$ el límite existe. Como $u \in \mathrm{RelInt}(\sigma)$

$\langle \vec{u}, \vec{m} \rangle = 0 \iff \vec{m} \in \sigma^\perp$

luego el valor de $\lim\limits_{t \to 0} t^{\langle \vec{u}, \vec{m} \rangle} = \begin{cases} 0, & \text{si } \langle \vec{u}, \vec{m} \rangle > 0 \quad (\text{i.e. } m \notin \sigma^\perp) \\ 1, & \text{si } \vec{m} \in \sigma^\perp \end{cases}$

$= z^{\vec{m}}(x_\sigma)$.

② Si $v \notin \sigma$ $\exists$ $m \in \sigma^\vee$: $\langle \vec{m}, \vec{v} \rangle < 0$

así que $z^{\vec{m}}(\lambda_u(t)) = t^{\langle \vec{u}, \vec{m} \rangle}$ no tiene límite cuando $t \to \infty$.

Se sigue que, si $u \notin |\Delta|$ $\lim\limits_{t \to 0} \lambda_u(t)$ NO existe en $X(\Delta)$

(d.l.c estaría en algún U_σ!).

(5)

Ejercicio: ⓐ Sea $\begin{array}{ccc}(\mathbb{C}^*)^2 & \hookrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & [\frac{x}{y} : y : 1]\end{array}$. Calcule el abanico Δ.

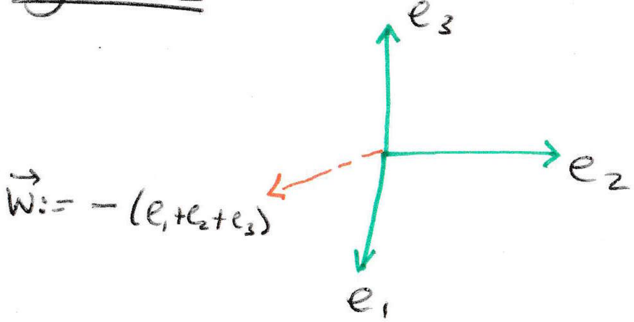
ⓑ Sea $\begin{array}{ccc}(\mathbb{C}^*)^2 & \hookrightarrow & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \\ (x,y) & \longmapsto & ([x:1], [y:1])\end{array}$. Calcule el abanico Δ.

Ejercicio: Fije $\sigma \in \Delta$ y fije el toro $T' := \mathcal{O}(\sigma)$

Demuestre que $\overline{\mathcal{O}(\sigma)} = X(\mathrm{Star}(\sigma))$ analizando los límites de subgrupos uniparamétricos $N(\sigma)$ de $\mathcal{O}(\sigma)$.

(este ejercicio debería dar otra prueba de la caracterización geométrica de las órbitas de T en $X(\Delta)$).

Ejercicio: Considere el abanico con conos maximales



$\{\{e_1, e_2, e_3\}, \{e_1, e_2, \vec{w}\}, \{e_2, e_3, \vec{w}\}, \{e_1, e_3, \vec{w}\}\}$

clausuras de las órbitas $(V(\sigma))$

Calcule los abanicos de TODAS las órbitas.

(usando la descripción del video anterior).

$\cancel{\Delta = \{0, e_1, e_2, e_3\}}$