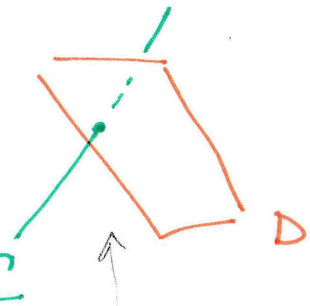
# Estructura de divisores y de curvas: — (Teoría de Cono de Mori).

Si $D \subseteq X$ es un divisor (de Cartier) y $C \subseteq X$ una curva completa

queremos definir

$$\underbrace{D}_{\text{divisores}} \cdot \underbrace{C}_{\text{Curvas}} = \# \text{ de puntos en } D \cap C$$

con multiplicidades adecuadas.




localmente se ve así

Queríamos:

(1) Que dependa sólo de equivalencia lineal

$$D \cdot C = E \cdot C \quad \text{si} \quad D \sim E$$

(2) Si la intersección es transversal $D \cdot C = \# |C \cap D|$

(i.e. $\forall_p \in D \cap C$ $p$ es suave en $D$, $C$ y $X$

$$T_p(C) \subseteq T_p(X) \quad \text{y} \quad T_p(D) \subseteq T_p(X)$$

transversos. (es decir $\underbrace{T_p(C)}_{\dim 1}$ y $\underbrace{T_p(D)}_{\dim d-1}$ generan $T_p(X)$ )

③ $(D_1 + D_2) \cdot C = D_1 \cdot C + D_2 \cdot C$.

El elemento clave será el grado de un haz de línea (line bundle) en una curva suave completa $C$.

$$\mathrm{Div}(C) = \left\{ \sum a_P P \ , \ a_P \in \mathbb{Z} \right\} \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}$$

$$\sum a_P P \longmapsto \sum a_P .$$

$\boxed{\textbf{Teorema:}}$ Todo divisor principal $D \in \mathrm{PDiv}(C)$ en una curva irreducible suave y completa cumple $\boxed{\deg(D) = 0}$

Se sigue que $\deg : \underset{\overset{\|}{Cl(C)}}{\mathrm{Pic}(C)} \longrightarrow \mathbb{Z}$ está bien definido "el grado de un line bundle en la curva".

$\boxed{\textbf{Obs:}}$ Si $\mathcal{L}$ es un line bundle $/ C$ y $s$ es una sección racional cualquiera $\deg(\mathcal{L}) = \deg(\mathrm{div}(s))$

[ Si $U_i$ son abiertos trivializantes y $g_i \in \mathcal{K}(C)$ forman una sección racional $s$ que satisfacen $g_j = g_{ji}\, g_i \Rightarrow \mathrm{div}(g_j) = \mathrm{div}(g_i)$ en $U_i \cap U_j$ así que definimos $\mathrm{div}(s)|_{U_i} = \mathrm{div}(g_i)|_{U_i}$ $\quad \deg(\mathcal{L}) = \deg(\mathrm{div}(s))$.

**Def:** El producto de divisores y curvas se define así:

① Si $D \subseteq X$ es un divisor de Cartier entonces tenemos un haz localmente trivial de rango 1 (line bundle, locally free sheaf of rank one, invertible sheaf) $\mathcal{O}_X[D]$

② Si $C \subseteq X$ es una curva completa irreducible tenemos una normalización (canónica) $\tilde{C} \xrightarrow{f} C \subseteq X$. Como una curva normal es no singular entonces $\tilde{C}$ es no-singular.

③ Definimos $C \cdot D := \deg\left(f^{*}\mathcal{O}_X[D]\right)$

Cómo se calcula tal producto?

① Como $D \subseteq X$ es de Cartier tiene generadores locales $f_i \in \mathbb{C}(X)^*$ : $D_{|U_i} = \mathrm{div}(f_i)_{|U_i}$

② Si $C \not\subseteq D$ entonces $\phi^*(f_i)$ $\quad \tilde{C} \xrightarrow{\phi} C$ definen un divisor en $\tilde{C}$ y eso permite calcular el grado.

②b Si $C \subseteq D$ construimos cociclos $g_{ij} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^*$ y definimos $f^*(\mathcal{O}_X[D])$ como el haz definido por $\phi^*(g_{ij})$ en $\phi^{-1}(U_i) \cap \phi^{-1}(U_j)$.

**Ejercicio:** Verifique que el producto de intersección definido satisface:

① Si $D \sim D'$ y $C \subseteq X$ es una curva $\Rightarrow D \cdot C = D' \cdot C$

② Si $D$ y $C$ tienen intersección transversal en puntos suaves entonces $D \cdot C = \#(D \cap C)$

③ $$(D_1 + D_2) \cdot C = D_1 \cdot C + D_2 \cdot C.$$

**Def:** Si $C \subseteq \mathbb{P}^n$ es una curva suave definimos el grado de $C$ como $C \cdot H$ donde $H$ es un hiperplano en $\mathbb{P}^n$.

**Ejercicio:** Demuestre que

ⓐ $\mathbb{P}^1 \xrightarrow[\varphi]{[s^2:st:t^2]} \mathbb{P}^2 \qquad \deg(\operatorname{im} \varphi_2) = 2$

ⓑ $\mathbb{P}^1 \xrightarrow[\varphi]{[s^3:s^2t:st^2:t^3]} \mathbb{P}^3 \qquad \deg(\operatorname{im} \varphi_3) = 3$

ⓒ $\mathbb{P}^1 \xrightarrow[\varphi]{[s^n:s^{n-1}t:\dots:st^{n-1}:t^n]} \mathbb{P}^n \qquad \deg(\operatorname{im} \varphi_n) = n$

ⓓ (*) Demuestre que toda curva no singular de grado $n$ en $\mathbb{P}^n$ no contenida en ningún hiperplano es proyectivamente equivalente a $\operatorname{im}(\varphi_n)$.

<u>Ejemplo:</u> En $\mathbb{P}^2$, sabemos que $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}$ y que está generado por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}[H]$. Como $\mathbb{P}^2$ es una superficie divisores y curvas coinciden así que hay una "forma de intersección" bilineal y simétrica

$$\begin{aligned} \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^2) \times \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^2) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (aH, bH) &\longmapsto ab\boxed{(H \cdot H)} \end{aligned}$$

Cuanto es ?

<u>Sol 1:</u> Con el line bundle:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 &\xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^2 \\ [s:t] &\longmapsto [0:s:t], \end{aligned} \qquad C = \mathrm{im}\,\varphi, \quad D = H = V(X_0)$$

$H \cdot C \overset{?}{=}$ Como $C \subseteq D$ debo estudiar los cociclos.

$U_0 \quad \frac{x_0}{x_0} = f_0 \qquad \varphi^{-1}(U_0) = \emptyset$

$U_1 \quad \frac{x_0}{x_1} = f_1$

$U_2 \quad \frac{x_0}{x_2} = f_2$

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi^{-1}(U_1) &= V_s \\ \varphi^{-1}(U_2) &= V_t \end{aligned} \qquad \boxed{\varphi^*(g_{12}) = \frac{t}{s}}}$$

$\varphi^*(\mathcal{O}_X[D])$

$$g_{12} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{x_0}{x_1}}{\frac{x_0}{x_2}} = \frac{x_2}{x_1}$$

Para calcular el grado:

consideramos una sección racional

en $V_t$, $1$

en $V_s$, $\frac{t}{s}$

el divisor $E$ de esta sección racional es:

$$\mathrm{div}(1) = 0 \quad \text{en } V_t$$

$$\mathrm{div}\left(\frac{t}{s}\right) = 1\{t=0\} \quad \text{en } V_s$$

$$E = 1\cdot\{t=0\} \Rightarrow \boxed{\deg(E) = 1}$$

Sol 2: Movemos el divisor $H$ a algo linealmente equivalente $D' = V(X_1)$ y hacemos pullback de los grados mismos.

$U_0 \quad \frac{X_1}{X_0} = f_0$

$U_1 \quad \frac{X_1}{X_1} = f_1$

$U_2 \quad \frac{X_1}{X_2} = f_2$

Como $C \not\subseteq D'$ podemos consider. el ~~hat~~ divisor definido localmente por los pullbacks de grs locales.

$\varphi^{-1}(U_0) = \emptyset \quad \times$

$\varphi^{-1}(U_1) = V_s \quad \varphi^*(f_1) = 1$

$\varphi^{-1}(U_2) = V_t \quad \varphi^*(f_2) = \frac{s}{t}$

así que el divisor es $E = 1\{s=0\}$.

$\deg(E) = 1 = H\cdot H$

Hemos demostrado el

**Teorema [Bezout]**

Si $D, D'$ son curvas irreducibles distintas en $\mathbb{P}^2$ de grados $d$ y $e$

entonces $$D \cdot D' = de$$
y si la intersección es transversal se encuentran en exáctamente $de$ puntos distintos.

$\boxed{\text{Dem}}$ $D \sim dH$, $D' \sim eH$

$$D \cdot D' = (dH)\cdot(eH) = de(H\cdot H) = de \checkmark$$