# Productos de intersección en variedades tóricas:

Recuerde que el abanico $\cancel{\Delta}$ nos permite describir todas las subvariedades $T$-estables de $X(\Delta)$. Las de codimensión $k$ están en correspondencia con los conos $k$-diml $\tau \in \Delta$ así:

$$\tau \in \Delta \longmapsto \quad \text{(i)} \quad N_\tau = \langle \tau \cap N \rangle_{\mathbb{Z}}, \quad N(\tau) := \underbrace{N/N_\tau}_{\text{rank } n-k}$$

$$\text{(ii)} \quad \mathrm{Star}(\tau) = \{\sigma \in \Delta : \sigma \succ \tau\}$$

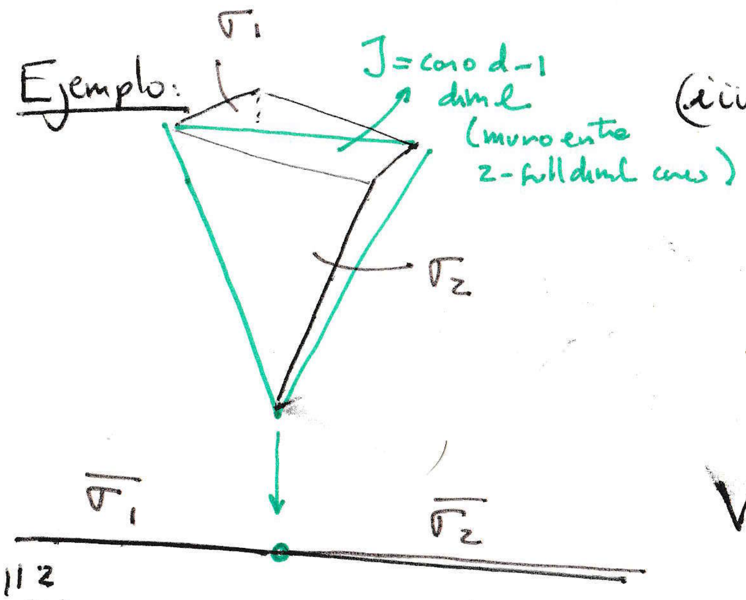
(iii) El mapa cociente define un abanico

$$N \longrightarrow N(\tau)$$
$$\sigma \longmapsto \bar{\sigma}$$

$$\overline{\mathrm{St}(\tau)} = \{\bar{\sigma} : \sigma \succ \tau\}$$

$V(\tau)$ es la variedad tórica $X(\overline{\mathrm{St}(\tau)})$.

Ejemplo:




$\cong \mathbb{P}^1$ (no-singular y completa).

**Teorema:** [Productos de intersección T-estables]

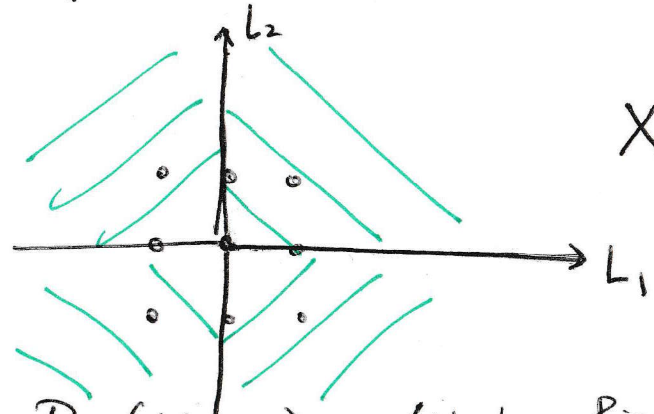
Sea $C = V(\tau)$ la curva torus-invariante en $X(\Delta)$ definida por el muro $\tau = \sigma \cap \sigma'$, $\sigma, \sigma' \in \Delta$ full dim'l.

Sea $D \subseteq X(\Delta)$ un divisor de Cartier T-estable con Cartier data $m_\sigma, m_{\sigma'} \in M$ ~~para~~ en $U_\sigma, U_{\sigma'}$ resp.

$$D \cdot C = \langle m_\sigma - m_{\sigma'}, u \rangle$$

donde $u \in \sigma' \cap N$ mapea al generador minimal de $\bar{\sigma}' \subseteq N(\tau)_{\mathbb{R}}$.

**Ejercicio:**



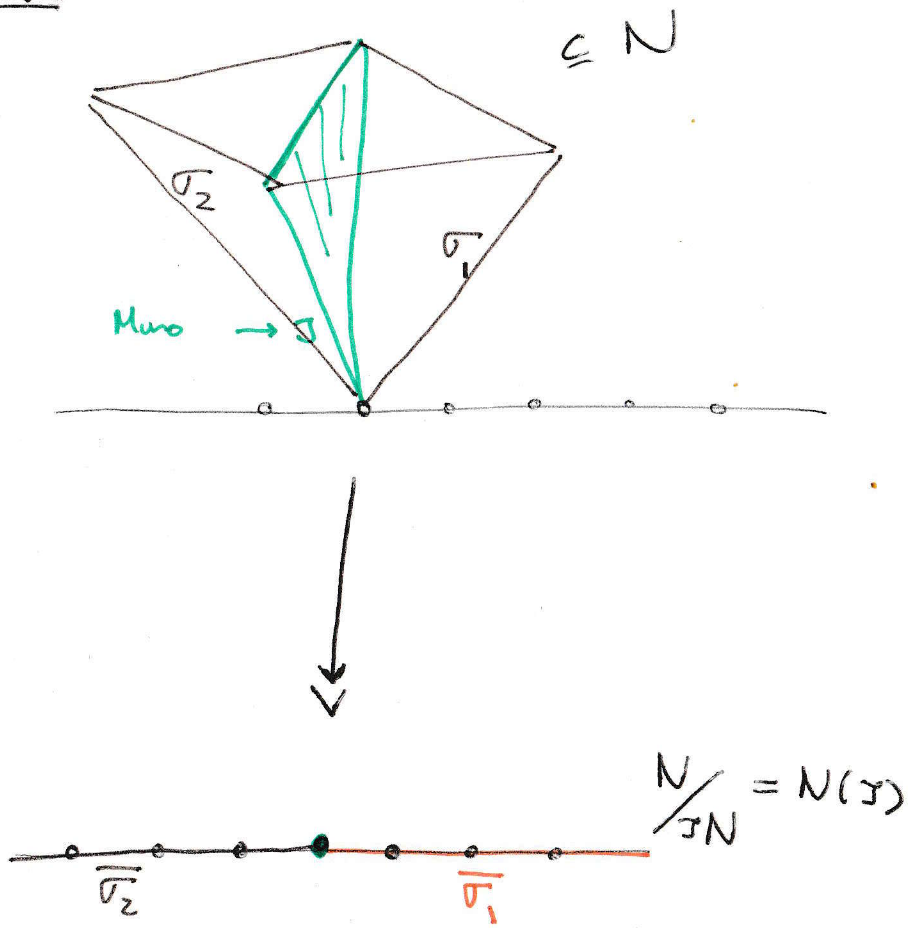

$X(\Delta) = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

ⓐ Calcule $\mathrm{Pic}(X(\Delta))$ (Hint: $\mathrm{Pic}(X(\Delta)) \cong \mathbb{Z}^2$, $aL_1 + bL_2$ ~~con ($L_1 = \pi_1^*(p)$, $L_2 = \pi_2^*(q)$)~~)

ⓑ Encuentre los productos $L_1^2$, $L_1 L_2$, $L_2^2$

ⓒ Encuentre un "Teorema de Bezout" para $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Proof:




$$
\begin{tikzcd}
X(\Delta) & M \\
X(\overline{\mathrm{St}(\tau)}) \cong \mathbb{P}^1 \arrow[u, "\varphi"] & M(\tau) \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

$$\mathbb{P}^1 = U_{\overline{\sigma_2}} \cup U_{\overline{\sigma_1}}$$

$$U_{\overline{\sigma_1}} \xrightarrow[\text{morphism}]{\varphi_1} U_{\sigma_1} \iff \mathbb{C}[\overline{\sigma_1}^\vee \cap M(\tau)] \xleftarrow{\varphi_1^*} \mathbb{C}[\sigma_1^\vee \cap M]$$

$$\begin{cases} 0, & m \notin \tau^\perp \\ \chi^m, & m \in \tau^\perp \end{cases} \longleftarrow \chi^m$$

$$\downarrow$$

$$t^{\langle m, u\rangle}$$

si $u$ es unitario en la dirección $\perp$ en $\sigma_1$.

(un lattice point $u \in \sigma_1$ que mapea al unitario de $\overline{\sigma_1}$)

Suppose $D$ is a T-invariant Cartier divisor with Cartier data $m_{\sigma_1}, m_{\sigma_2}$

$$[\mathrm{div}(x^{-m_{\sigma_1}}) = D]_{|U_{\sigma_1}}$$
$$[\mathrm{div}(x^{-m_{\sigma_2}}) = D]_{|U_{\sigma_2}}$$

Hacemos pullback de esas secciones

$$\varphi_1^*(x^{-m_{\sigma_1}}) = t^{-\langle m_{\sigma_1}, u\rangle} \quad \text{en } U_{\overline{\sigma_1}}$$
$$\varphi_2^*(x^{-m_{\sigma_2}}) = t^{\langle -m_{\sigma_2}, -u\rangle} \quad \text{en } U_{\overline{\sigma_2}}$$

así que el divisor del pullback es:

$$-\langle m_{\sigma_1}, u\rangle P_{\overline{\sigma_1}} + \langle m_{\sigma_2}, u\rangle P_{\overline{\sigma_2}} = \varphi^*(D)$$

así que la intersección es

$$\deg(\varphi^*(\mathcal{O}_{X(\Delta)}[D])) = \langle m_{\sigma_2}, u\rangle - \langle m_{\sigma_1}, u\rangle$$
$$= \langle m_{\sigma_2} - m_{\sigma_1}, u\rangle \quad \text{como afirmado.}$$