Órbitas y clausuras de órbitas

Si $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ es un cono poliedral N-racional definimos un punto distinguido $x_\sigma \in U_\sigma := \operatorname{spec}(\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M])$ dado por el homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras

$$x_\sigma(u) = \begin{cases} 1, & \text{si } u \in \sigma^\perp \quad (\text{i.e. } \langle u,s\rangle = 0 \ \forall s \in \sigma) \\ 0, & \text{dlc.} \end{cases}$$

Definimos la órbita de σ $\boxed{O_\sigma := T \cdot x_\sigma}$

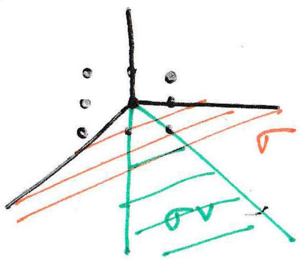
<u>Ejercicio:</u> (1) Demuestre que x_σ está bien definido (muestre que $\sigma^\perp$ es una cara de $\sigma^\vee$)

(2) Si σ genera $N_{\mathbb{R}}$ (i.e. $\operatorname{span}(\sigma) = N_{\mathbb{R}}$) muestre que x_σ es el único punto fijo de la acción de T en U_σ.

(3) Si σ NO genera a $N_{\mathbb{R}}$ muestre que la acción de T en U_σ no tiene puntos fijos. Concluya que $\boxed{|\max(\Delta)| = \#\text{ Puntos fijos de } T \text{ en } X(\Delta).}$

conos fulldimensionales.

<u>Ejemplo:</u>



$$\mathbb{C}[xy^{-1}, y^{-1}] \xrightarrow{x_\sigma} \mathbb{C}$$
$$xy^{-1} \longmapsto$$
$$y^{-1} \longmapsto$$

$\boxed{\text{Cómo son las órbitas de la acción de } T \text{ en } X(\Delta)\,?}$

Más específicamente, dado x_J para $J \in \Delta$ queremos entender:

(i) $\mathrm{Orb}(x_J) =: O(J)$, es decir la imagen del mapa

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\varphi_J} & X(\Delta) \\ t & \longmapsto & t\cdot x_J \end{array}$$

(ii) La clausura de $O(J)$

$$V(J) := \overline{O(J)} \subseteq X(\Delta)$$

Para (i) lo primero es recordar que $x_J \in U_J$ y U_J es T-estable así que $\mathrm{im}(\varphi_J) \subseteq U_J$ y determinar la estructura de la órbita es un problema afín,

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\varphi_J} & U_J \subseteq X(\Delta) \\ t & \longmapsto & t\cdot x_J \end{array}$$

Recuerde que, para $\vec{m} \in M$

$$z^{\vec{m}}(t\cdot p) = z^{\vec{m}}(t)\, z^{\vec{m}}(p)$$

así que a nivel de álgebras el mapa es:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}[M] & \mathbb{C}[J^\vee \cap M] \arrow[l, "\varphi_J^*"'] \arrow[dd] \\ \left\{\begin{array}{l} z^m,\ m\in J^\perp \\ 0 \text{ d.l.c.} \end{array}\right. = z^m \cdot z^m(x_J) & z^m \arrow[l, mapsto] \\ & \mathbb{C}[J^\perp \cap M] \arrow[uul, "\text{inclusión}"] \end{tikzcd}$$

$$I(\mathrm{im}\,\varphi_J) \subseteq \mathbb{C}[U_J]$$
$$= (z^m : m \in J^\vee,\ m \notin J^\perp)$$

A nivel de variedades

$$T \longrightarrow O(J) \quad \text{con imagen densa}$$

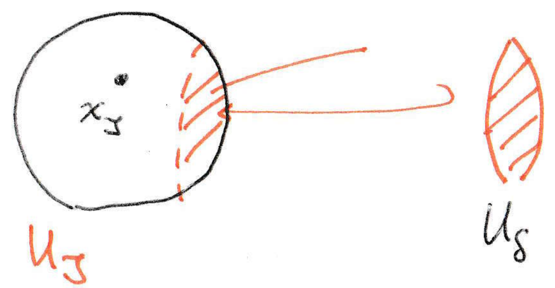
(i)

luego $\boxed{O(J) = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[J^\perp \cap M])}$

De lo anterior $O(J)$ es cerrada en U_J $\left(\mathbb{C}[J^\vee\cap M] \longrightarrow \mathbb{C}[J^+\cap M]\right)_{(3)}$
es isomorfa a un toro $(\mathbb{C}^*)^{d-\dim(J)}$
y $\boxed{M(J) = J^+\cap M}$

(ii) Cómo es $\overline{O(J)}$ en $X(\Delta)$?

Note que $O(J)\cap U_\sigma \neq \emptyset \iff x_J \in U_\sigma$.
Para cuáles σ $x_J\in U_\sigma$?
Si $\sigma \succeq J \Rightarrow x_J \in U_\sigma$ (pq $U_J\subseteq U_\sigma$). Vamos a demostrar que estos son los únicos. Mostremos que $\delta \not\succeq J \Rightarrow x_J \notin U_\delta$.



Anillo de álgebras

$\delta^\vee \supsetneq J^\vee$ luego

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}[\delta^\vee\cap M] \arrow[drr, dashed, "!\hat{x}_J"'] & & \mathbb{C}[J^\vee\cap M] \arrow[ll] \arrow[d, "x_J"] \\
 & & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

Por lema de abiertos principales
$\mathbb{C}[\delta^\vee\cap M] \cong \mathbb{C}[J^\vee\cap M]_\chi$
donde χ es un testigo para
$\delta \preceq J$

si existiera esta localización
entonces $\chi(x_J)\neq 0$
⊠ def de x_J

Luego "$x_J \in U_\sigma \iff \sigma \succeq J$" y

$$O(J) \subseteq V(J) \subseteq \bigcup_{\sigma\succeq J} U_\sigma$$

Calcularemos la clausura de $O(\tau)$ en cada U_σ, $\sigma \succeq \tau$. Para τ fijo.

Sea $\sigma \succeq \tau$,
$$T \xrightarrow{\varphi_\sigma} U_\sigma \qquad t \longmapsto t \cdot x_\tau$$
con
$$x_\tau : \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad z^m \longmapsto \begin{cases} 1, & m \in \tau^\perp \cap \sigma^\vee \\ 0, & \text{d.l.c.} \end{cases}$$

A nivel de álgebras el mapa es por lo tanto,
$$\mathbb{C}[M] \longleftarrow \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$$
$$\begin{cases} z^m, & m \in \sigma^\vee \cap \tau^\perp \\ 0, & \text{d.l.c.} \end{cases} \longleftarrow\!\!\shortmid \; z^m$$

todos los anillos coordenados son subálgebras de $\mathbb{C}[\tau^\perp \cap M] = \mathbb{C}[M(\tau)]$

luego $\mathcal{I}(\overline{\mathrm{im}(\varphi)}) = (z^m : m \in \sigma^\vee, m \notin \tau^\perp)$

y $\mathbb{C}[\overline{\mathrm{im}(\varphi)}] = \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap (\tau^\perp \cap M)] \subseteq \mathbb{C}[\tau^\perp \cap M]$

$$U_\sigma(\tau) := \mathrm{spec}(\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M(\tau)])$$

$$\boxed{V(\tau) = \bigcup_{\sigma \succeq \tau} U_\sigma(\tau)}$$

Podemos describirla mediante un abanico? Δ'

$$\cap\!\!| \qquad \bigcup_{\sigma \succeq \tau} U_\sigma$$

los pegamentos son compatibles.

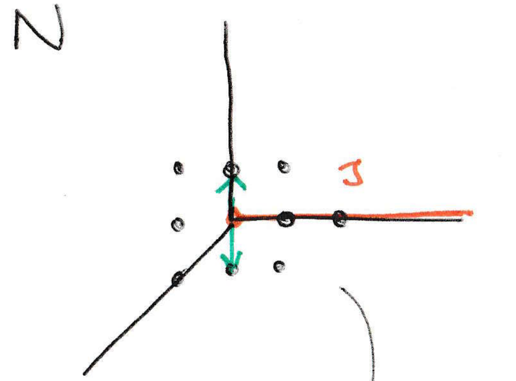
Un abanico dónde?

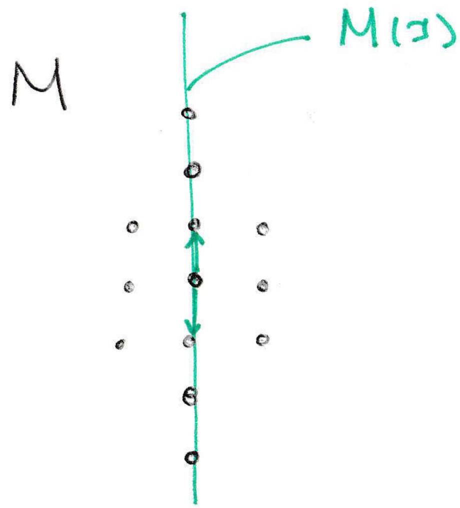
$M(J) = J^{\perp} \cap M$ $\qquad\qquad$ $N(J) = \mathrm{Hom}(J^{\perp} \cap M, \mathbb{Z})$

Defina $N_J := \langle J \cap N \rangle_{\mathbb{Z}} \longrightarrow$ subgrupo generado por $J \cap N$

$\boxed{N(J) := N/N_J}$, notique $\mathrm{Hom}(N/N_J, \mathbb{Z}) = \{\vec{m} \in M : \langle m, N_J \rangle = 0 \Leftrightarrow m \in J^{\perp}\} = M(J)$

Ejemplo:

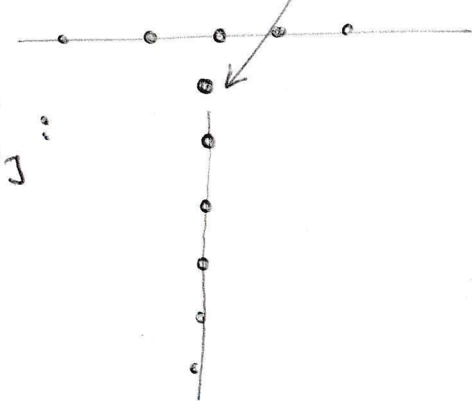




$N_J = \langle e_1 \rangle_{\mathbb{Z}}$

$O(J) \cong \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[y, y^{-1}])$

$N(J) := N/N_J$:



Queremos definir un abanico en $N(J)$ con conos $\bar{\sigma}$:

$$\mathbb{C}[\bar{\sigma}^{\vee} \cap M(J)] = \mathbb{C}[\sigma^{\vee} \cap J^{\perp} \cap M]$$

Lema:

Sea $\sigma \subseteq N$ un cono con $\tau \preceq \sigma$. y sea

$$\overline{\sigma} = \sigma + \frac{(N_\tau)_{\mathbb{R}}}{(N_\tau)_{\mathbb{R}}} \subseteq N(\tau)$$

Entonces $\overline{\sigma}^\vee \cap M(\tau) = \sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M.$

Dem:

$$\overline{\sigma}^\vee = \{ m \in M(\tau)_{\mathbb{R}} : \langle m, u \rangle \geq 0 \ \forall u \in \overline{\sigma} \}$$

Si $m \in M(\tau)$ y $m \in \overline{\sigma}^\vee$ y $u = s + (N_\tau)_{\mathbb{R}}$ para $s \in \sigma$

$\langle m, u \rangle = \langle m, s \rangle$ así que $m \in \overline{\sigma}^\vee \iff m \in \sigma^\vee$

y como $M(\tau) = \tau^\perp \cap M$ se tiene el enunciado.

$$\boxed{O_\tau := \mathrm{Spec}\left(\mathbb{C}[M(\tau)]\right)} = \mathrm{Spec}\left(\mathbb{C}[\tau^\perp \cap M]\right) \longleftarrow \mathbb{C}[\tau^\vee \cap M] \;(4) \;⑦$$

Def: La *estrella* del cono τ en Δ es la colección de conos $\sigma \in \Delta$ con $\sigma \succcurlyeq \tau$.

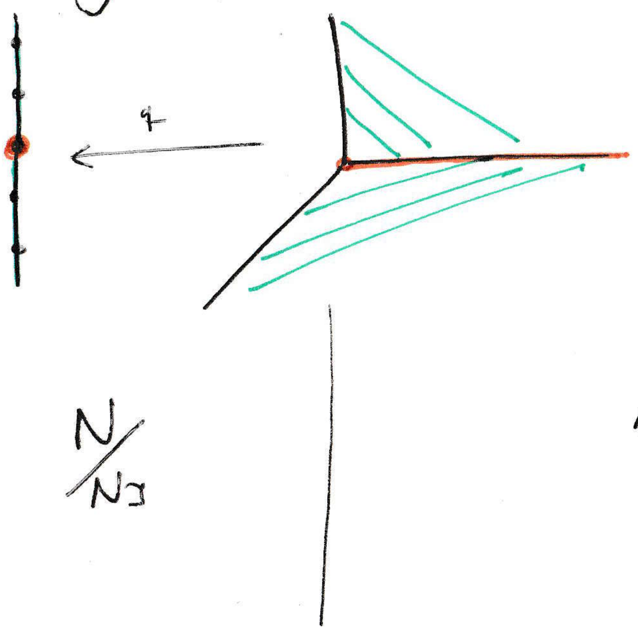
Los conos de la estrella tienen una imagen natural en el cociente: $\sigma \in \mathrm{St}(\tau)$

$$\bar{\sigma} := \sigma + (N_\tau)_{\mathbb{R}} \big/ (N_\tau)_{\mathbb{R}} \subseteq N_{\mathbb{R}} \big/ (N_\tau)_{\mathbb{R}} = N(\tau)_{\mathbb{R}}$$

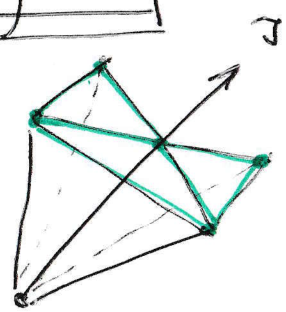
Def: $\{\bar{\sigma} : \tau < \sigma\}$ forman un abanico en $N(\tau)$, llamado $\mathrm{St}(\tau)$

$$\boxed{V(\tau) := X(\mathrm{St}(\tau))}$$

Ejemplo:



Ejercicio: Dibuje $\mathrm{St}(\tau)$

$\Delta =$ 

Ejercicio: Demuestre que los pegamentos de los U_σ y de los $U_\sigma(\tau)$ para $\sigma \in \mathrm{Str}(\tau)$ son compatibles, es decir, que si $\tau \preccurlyeq \sigma \preccurlyeq \eta$

$$\begin{array}{ccc} U_\eta(\tau) & \longrightarrow & U_\eta \\ \downarrow & \# & \downarrow \\ U_\sigma(\tau) & \longrightarrow & U_\sigma \end{array}$$

Esto implica que

$$X(\mathrm{str}(\tau)) \hookrightarrow X(\Delta)$$

es un "closed immersion".

* **Ejercicio:** Demuestre que: $\forall \tau \in \Delta$ podemos describir los abiertos principales y las clausuras de las órbitas así:

ⓐ $$U_\sigma = \bigsqcup_{\tau : \tau \preccurlyeq \sigma} O(\tau)$$

ⓑ $$V(\tau) = \bigsqcup_{\gamma : \tau \preccurlyeq \gamma} O(\gamma)$$