Pegamento de variedades:

Vamos a construir nuevas variedades algebraicas pegando variedades afines. Más concretamente daremos una construcción combinatoria (explícita) del pegamento así como una propiedad universal.

INPUT: Sea I un conjunto de índices. Dados

$\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — variedades afines

$\forall \alpha, \beta \in I$ abiertos de Zariski $V_{\beta\alpha} \underset{\text{abierto}}{\subseteq} V_\alpha$

e isomorfismos $g_{\alpha\beta} : V_{\alpha\beta} \xrightarrow{\cong} V_{\beta\alpha}$

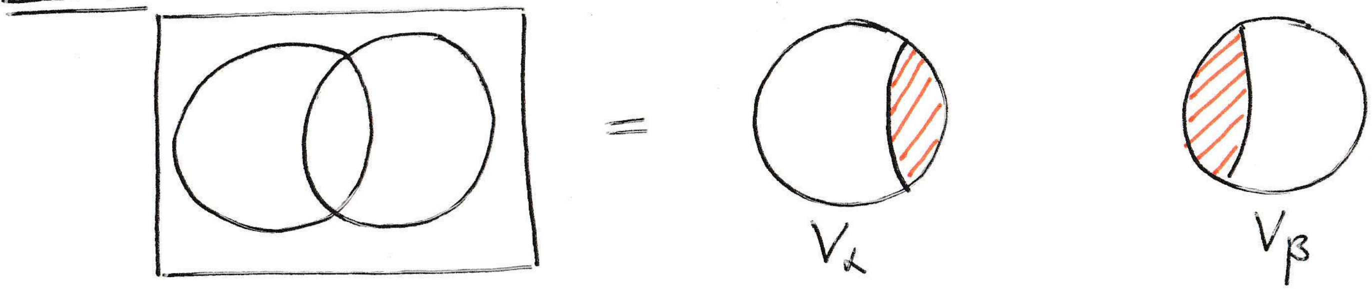
que satisfacen las siguientes condiciones

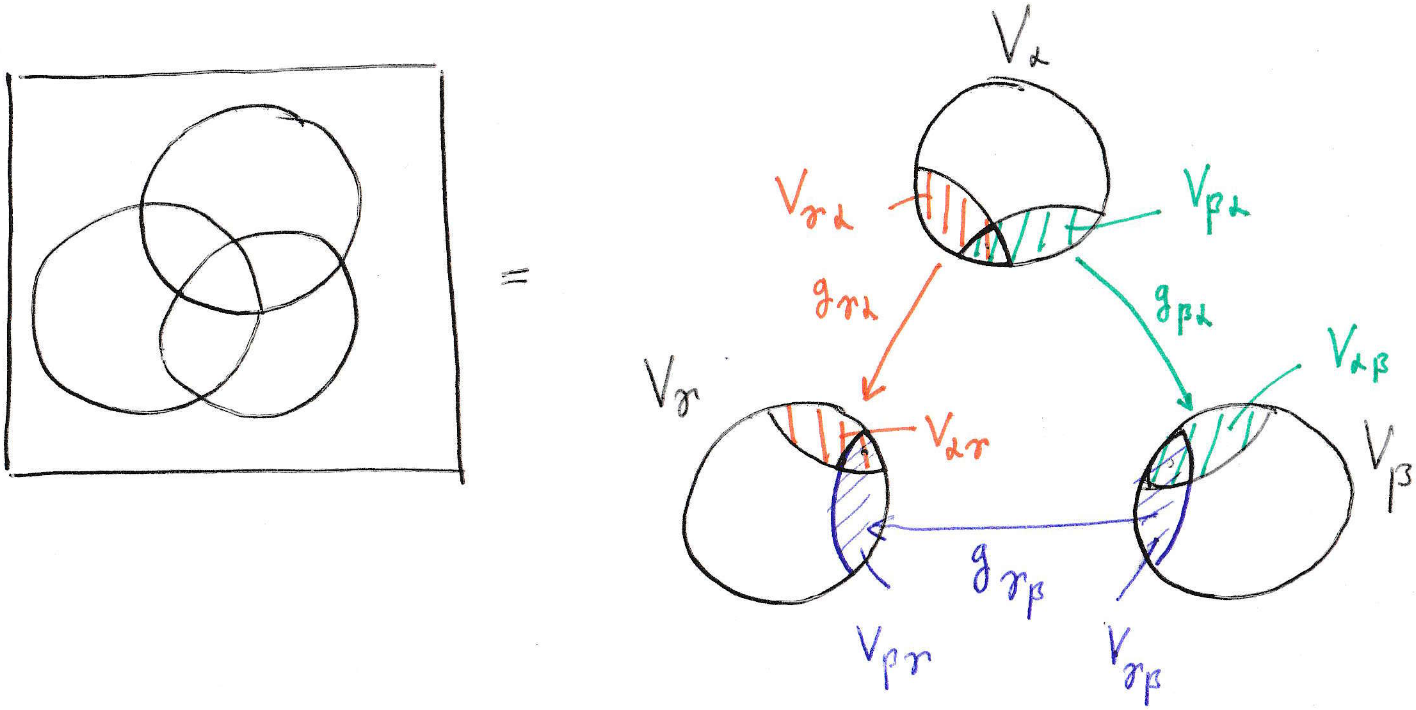
(0) $\forall \alpha \in I \left(g_{\alpha\alpha} = id, \ V_{\alpha\alpha} = V_\alpha \right)$

(1) $\forall \alpha, \beta \in I \left(g_{\alpha\beta}^{-1} = g_{\beta\alpha} \right)$

(2) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in I \left(\begin{array}{l} g_{\beta\alpha}\left(V_{\beta\alpha} \cap V_{\gamma\alpha}\right) = V_{\alpha\beta} \cap V_{\gamma\beta} \\ g_{\gamma\alpha} = g_{\gamma\beta} \circ g_{\beta\alpha} \text{ en } V_{\beta\alpha} \cap V_{\gamma\alpha} \end{array} \right)$

Idea:


=
V_α
V_β


=
V_α
$V_{\gamma\alpha}$
$V_{\beta\alpha}$
$g_{\gamma\alpha}$
$g_{\beta\alpha}$
V_γ
$V_{\alpha\beta}$
$V_{\alpha\gamma}$
V_β
$g_{\gamma\beta}$
$V_{\beta\gamma}$
$V_{\gamma\beta}$

Output:

Una variedad X con una cubierta por abiertos $X_\alpha \subseteq X$ e isomorfismos $\psi_\alpha : V_\alpha \longrightarrow X_\alpha$ que satisfacen:

(i) $\psi_\alpha(V_{\beta\alpha}) = X_\alpha \cap X_\beta$ y

(ii) $\psi_\beta = \psi_\alpha \circ g_{\alpha\beta}$ en $V_{\alpha\beta}$ $\forall \alpha, \beta$.

X se obtiene de "pegar" los V_α mediante los isomorfismos $g_{\alpha\beta}$.

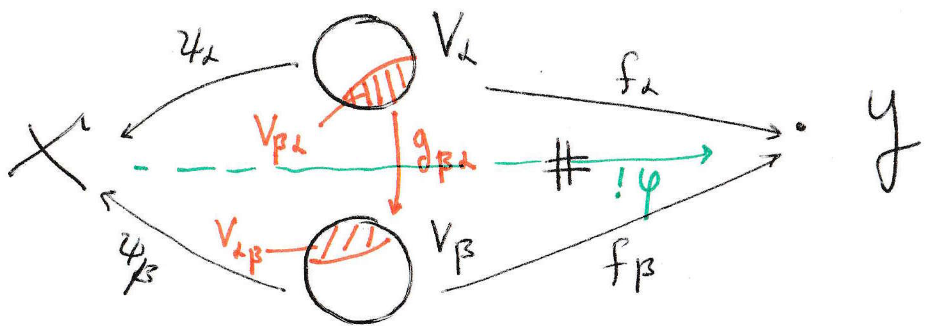
Más aún, la pareja $(X, \{\psi_\alpha\})$ satisface la siguiente propiedad universal

Para todo espacio con funciones $\mathcal{Y}$ y toda colección de morfismos $f_\alpha : V_\alpha \longrightarrow \mathcal{Y}$ que satisfacen

$$\forall \alpha, \beta \in I \ \forall x \in V_{\beta\alpha} \ \left(f_\beta \circ g_{\beta\alpha}(x) = f_\alpha(x) \right)$$

$\exists!$ morfismo $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{Y}$ tal que

$$\forall \alpha \left(\varphi \circ \psi_\alpha = f_\alpha \right)$$



Para construir esta variedad necesitamos describirla como espacio topológico y luego de eso describir su haz de funciones.

Def: En $\bigsqcup_{\alpha \in I} V_\alpha$ defina $(x,\alpha) \sim (y,\beta) \iff$ (1) $x \in V_{\beta\alpha}$ y (2) $g_{\alpha\beta}(x) = y$ (luego necesariamente $y \in V_{\alpha\beta}$)

Af: $\sim$ es una relación de equivalencia

(R) $(x,\alpha) \sim (x,\alpha)$ $\quad (V_{\alpha\alpha} = V_\alpha$ y $g_{\alpha\alpha} = id)$

(S) $(x,\alpha) \sim (y,\beta) \Rightarrow (y,\beta) \sim (x,\alpha)$ $\quad$ (pq $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1}$)

(T) $\underline{(x,\alpha) \sim (y,\beta)}$ y $\underline{(y,\beta) \sim (z,\gamma)}$

$x \in V_{\beta\alpha}$ y $g_{\beta\alpha}(x) = y$, $y \in V_{\alpha\beta}$

$y \in V_{\gamma\beta}$ luego $y \in V_{\alpha\beta} \cap V_{\gamma\beta} \Rightarrow x \in V_{\beta\alpha} \cap V_{\gamma\alpha}$

por el cociclo $g_{\gamma\alpha}(x) = g_{\gamma\beta}(g_{\beta\alpha}(x)) = g_{\gamma\beta}(y) = z$

así que $(x,\alpha) \sim (z,\gamma)$.

Definimos $X := \bigsqcup_{\alpha \in I} V_\alpha \big/ \sim$

$$\bigsqcup_{\alpha \in I} V_\alpha \xrightarrow{q} X$$
$$(x,\alpha) \longmapsto [(x,\alpha)]$$

$W \subseteq X$ es abierto ssi $q^{-1}(W)$ es abierto (equiv. $q^{-1}(W) \cap V_\beta$ abierto $\forall \beta$).

$\psi_\alpha : V_\alpha \xrightarrow{\#} X$, $\quad V_\alpha \xrightarrow{i} \bigsqcup V_\alpha \xrightarrow{q} X$ $\quad$ Note que ψ_α es un homeomorfismo.

Construcción del haz estructural:

Si $W \subseteq X$ es abierto queremos definir $\mathcal{O}_X(W)$

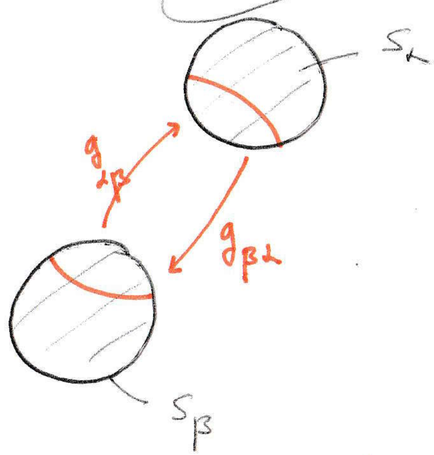
Como $q^{-1}(W) \cap V_\alpha$ es abierto para todo α podemos pensar

en $\prod_{\alpha \in I} \mathcal{O}_{V_\alpha}\left(q^{-1}(W) \cap V_\alpha\right)$ ← una sección distinta en cada uno de los abiertos V_α s_α

$\ni$

$(s_\alpha)_{\alpha \in I}$ ← queremos tomar aquellas secciones (tuplas) que coinciden en las intersecciones

$$\mathcal{O}_X(W) \subseteq \prod_{\alpha \in I} \mathcal{O}_{V_\alpha}\left(q^{-1}(W) \cap V_\alpha\right) \longrightarrow \prod_{\alpha \in I} \prod_{\beta \in I} \mathcal{O}_{V_\alpha}\left(V_{\beta\alpha} \cap q^{-1}(W)\right)$$



$$\boxed{g_{\alpha\beta}^{*}\left(\rho^{V_\alpha}_{V_{\beta\alpha}}(s_\alpha)\right) = \rho^{V_\beta}_{V_{\alpha\beta}}(s_\beta)}$$

En particular, si $U \subseteq V_\alpha$ es abierto entonces

$$\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_{V_\alpha}(U)$$

Ejercicio: Demuestre que $(X, \mathcal{O}_X)$ junto con los morfismos $\psi_\alpha : V_\alpha \to X$ satisface la propiedad universal de pegamento (slide (3)).

$$\begin{tikzcd} & \bigsqcup V_\alpha \arrow[dr, "q"] & \\ V_\alpha \arrow[ur, "i"] \arrow[rr] \arrow[rr, phantom, shift left=4ex, "\#"] & & X \end{tikzcd}$$