¿Qué es la geometría algebraica?

<u>Problema Clásico:</u> Entender y clasificar las soluciones de los sistemas de ecuaciones (Álgebra no-lineal).

$$X \subseteq \mathbb{P}^n$$

<u>Entendimiento "moderno":</u> Hay dos pasos

1. Entender X como variedad abstracta

2. Preguntarse, dada X abstracta, cuáles son todas las maneras posibles de meter a X en diferentes espacios proyectivos? Cómo se concretiza una variedad abstracta?

Dado X entender todos los haces de línea $\begin{array}{c}\mathcal{L}\\ \downarrow\\ X\end{array}$

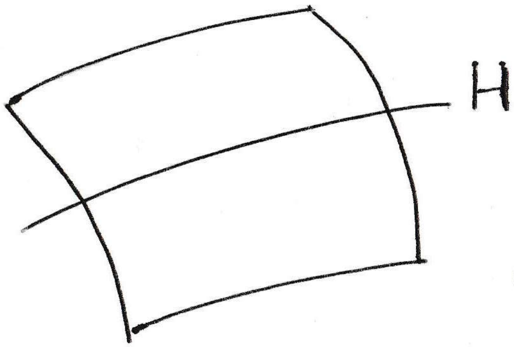
Esto es $\mathrm{CaDiv}(X)$

$\mathrm{Pic}(X)$]

1. Cómo son las secciones globales de los haces?
2. Cuándo un haz es bp free
3. Cuándo determina un embebimiento?
4. Cómo describir sus ecuaciones?

Haces de línea y mapas al espacio proyectivo

El espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ satisface $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n)=\mathbb{Z}$ y por ello tiene un haz distinguido llamado $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$. Este es el haz $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}[H]$ donde H es un hiperplano (cualquiera). Construyamos el haz vectorial geométrico correspondiente:



(1) localmente encuentro ecuaciones que lo definan en $\left(U_0 \ \ \frac{H}{x_0}\right), \left(U_1 \ \ \frac{H}{x_1}\right), \dots, \left(U_n \ \ \frac{H}{x_n}\right)$

(2)
$$g_{ij} = \frac{f_i}{f_j} = \frac{\frac{H}{x_i}}{\frac{H}{x_j}} = \boxed{\frac{x_j}{x_i} = g_{ij}}$$

Es decir:

$U_0 \times \mathbb{C}$

$\vdots$

$U_n \times \mathbb{C}$

$$U_j \cap U_i \times \mathbb{C} \subseteq U_j \times \mathbb{C} \longrightarrow U_i \times \mathbb{C}$$
$$(z, \lambda) \longmapsto (z, g_{ij}(z)\lambda)$$

Las secciones regulares globales son:

$(s_0, \dots, s_n)$: $s_j \frac{x_j}{x_i} = s_i$

$s_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U_i)$

Hiperplanos en $\mathbb{P}^n$

$$\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(H)) = \left\{\left(\frac{L}{x_0}, \frac{L}{x_1}, \dots, \frac{L}{x_n}\right)\right\}$$

con L forma lineal

Def:

$x \in X$ es un punto base (basepoint) para un haz si toda sección regular del haz satisface $s(x) = 0$.

Def: El divisor de una sección es $\mathrm{div}(s_i)$ en U_i si $(s_0, \dots s_n)$ es la sección (note que esta bien definido).

Ejemplo: $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ no tiene puntos base.
Dado $p \in \mathbb{P}^n$ $\exists H \in (\mathbb{P}^n)^*$ con $H(p) \neq 0$. $(p \notin H)$.

Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$, podemos restringir $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ a X y definir en X un haz de línea sin puntos base.

$g_{ij} = \frac{x_j}{x_i}$ es regular e invertible en $\mathcal{O}_X(\overline{U}_i \cap \overline{U}_j)$
donde $\overline{U}_i := U_i \cap X$, (localmente es tan inconsistente pq $X \cap U_i \subseteq U_i$) cerrado

luego podemos definir un haz de línea $i^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) =: \mathcal{O}_X(1)$
las restricciones de las secciones originales son secciones y obviamente siguen siendo libre de puntos base.

Ahora haremos la costrucción en la dirección contraria, si $\mathcal{L}$ es un haz de línea sobre X y $W \subseteq \Gamma(\mathcal{L}, X)$ un conjunto de secciones (espacio vect.) libres de ceros comunes, construimos un morfismo hacia un espacio proyectivo $\mathbb{P}(W^\vee)$ con $W^\vee = \{ l : W \to \mathbb{C} \text{ lineales} \}$.

Sean $\{s_0, \ldots, s_m\}$ una base para W

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{A}^{m+1} \\ & & \downarrow \pi \\ X & \longrightarrow & \mathbb{P}^m \\ x & \longmapsto & [s_0(x) : \cdots : s_m(x)] \end{array}$$

Bien definida: Sean V_i abiertos trivializantes para $\mathcal{L}$, en V_i las secciones son funciones regulares $r_0^i(x), \ldots, r_m^i(x)$, si $V_i \cap V_j \neq \emptyset$

$r_0^j(x) \ldots r_m^j(x)$ con

$\cancel{g_{b}(x) r_b}$

$$\boxed{r_a^j(x) = g_{ji}(x)\, r_a^i(x)}$$

indep. de a

así que $[r_0^i(x) : \cdots : r_n^i(x)] = [r_0^j(x) : \cdots : r_n^j(x)]$

el mapa parchea (porque es libre de basepoints)

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{C}^{m+1} \\ & \nearrow & \downarrow \\ X \cap V_i & \xrightarrow[\text{así que es regular}]{\#} & \mathbb{P}^m \end{array}$$

Qué pasa en variedades tóricas?

① Cuándo es $\mathcal{O}_X[D]$ libre de puntos base? (basepoint-free)

secciones globales de line bundles.

Teorema: Sea D un divisor T-estable de Weil en $X(\Delta)$

Entonces

$$\Gamma(X,\mathcal{O}_X[D]) = \boxed{\bigoplus_{x^m:\ \mathrm{div}(x^m)+D\geq 0} \mathbb{C}\, x^m}$$

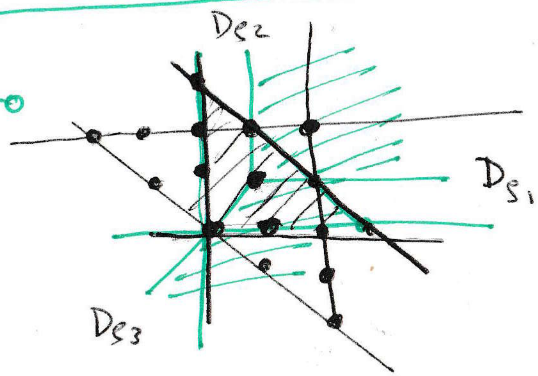
las secciones globales son generados por monomios

Más aún, si $D = \sum_{\rho\in\Delta(1)} a_\rho D_\rho$ entonces

$$\mathrm{div}(\chi^m)+D\geq 0 \iff \langle m,u_\rho\rangle + a_\rho \geq 0 \quad \forall \rho\in\Delta(1)$$

$$\boxed{P_D = \{m\in M:\ \langle m,u_\rho\rangle + a_\rho \geq 0\}}$$

Poliedro



$\Gamma(\mathbb{P}^2,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}[D_{\rho_1}+D_{\rho_2}+D_{\rho_3}])$

$\langle m, e_1\rangle \geq -1$

$\langle m, e_2\rangle \geq -1$

$\langle m, e_1+e_2\rangle \geq -1$

$-x-y\geq -1$

Dem:

D es T invariante

$$\mathcal{O}_X(T) \\ \| $$

$$\mathcal{O}_X[D](X) = \{ f \in \mathbb{C}(X) : \operatorname{div}(f) + D \geq 0 \} \subseteq \mathbb{C}[M]$$

$$\operatorname{div}(f)|_T + D|_T \overset{\circ}{=} \operatorname{div}(f)|_T \geq 0$$

y son un subespacio estable bajo la acción de T, luego se descompone como suma de subrepresentaciones

$$\mathcal{O}_X[D](X) = \bigoplus_{\chi^m : \chi^m \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X[D])} \mathbb{C}\chi^m$$

$$\operatorname{div}(\chi^m) + D \geq 0 \iff \chi^m \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X[D])$$

$$\iff \boxed{\langle m, u_\rho \rangle + D_\rho \geq 0 \quad \forall \rho.} \leftarrow P_D.$$

(2) Suponga que los conos maximales de Δ son full-diml y que D es de Cartier, entonces ...

Si adicionalmente $D \in \mathrm{CaDiv}(X)$ entonces localmente tiene

Cartier data $m_\sigma \in M$ con $\mathrm{div}(\chi^{m_\sigma})|_{U_\sigma} = D|_{U_\sigma}$.

es decir $\langle m_\sigma, u_\rho \rangle + a_\rho = 0 \quad \rho \in \sigma(1)$

Si los conos maximales de Δ son full-diml entonces m_σ está completamente determinada por las ecuaciones de arriba.

<u>**Lema:**</u> D es basepoint-free $\iff$ $m_\sigma \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X[D]) = P_D$
$\forall \sigma \in \Delta$, maximal.

<u>**Dem:**</u> Si D no tiene puntos base entonces, sea p el pto fijo de U_σ, $\exists$ $\chi^m \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X[D])$:

$\chi^m(p) \neq 0$, $\mathrm{div}_0(\chi^m) = \mathrm{div}(\chi^m) + D \geq 0$ y en particular.

$\rho \in \sigma(1)$ $\quad \langle m, u_\rho \rangle + a_\rho \geq 0$ y no estrictamente pq de lo contrario p sería un cero de la sección χ^m. $\underset{\sigma \text{ es full-diml.}}{\Longrightarrow}$ $\boxed{m = m_\sigma}$ y por lo tanto $m_\sigma \in P_D$.

Recíprocamente, $m_\sigma \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X[D])$

$$\mathrm{div}_0(\chi^{m_\sigma}) = \mathrm{div}(\chi^{m_\sigma})|_{U_\sigma} + D|_{U_\sigma} = 0$$

$\Rightarrow$ no tiene ceros en U_σ y es una sección global, como los U_σ cubren X ✓