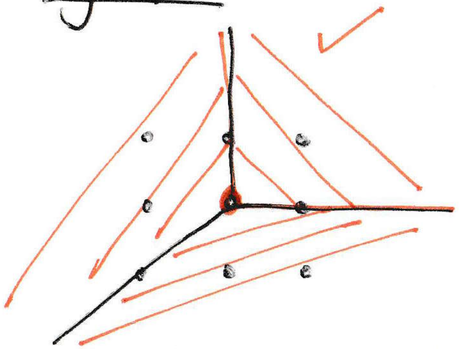
Def: Sea N un retículo. Un abanico N-racional es un conjunto Δ finito de conos poliedrales N-racionales que satisface las siguientes condiciones: (7)

(i) Todo cono $\tau \in \Delta$ es puntudo (i.e. $0 \preccurlyeq \tau \ \forall \tau \in \Delta$)

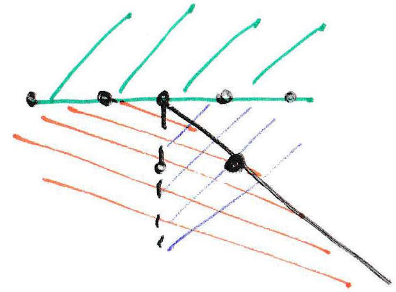
(ii) $\tau \preccurlyeq \sigma,\ \sigma \in \Delta \Rightarrow \tau \in \Delta$

(iii) Si $\sigma_1, \sigma_2 \in \Delta \Rightarrow \sigma_1 \cap \sigma_2 \in \Delta$

Ejemplo:



No ejemplo:



Def: $\max(\Delta) = \{$conos maximales del abanico $\Delta\}$.

Def: La variedad tórica $X(\Delta)$ asociada a un abanico N-racional se construye haciendo pegamento del siguiente input:

(1) Afines $\{U_\sigma\}_{\sigma \in \max(\Delta)}$

(2) Abiertos $\{U_{\sigma_1\sigma_2} \subseteq U_{\sigma_2} : \sigma_1, \sigma_2 \in \max(\Delta)\}$

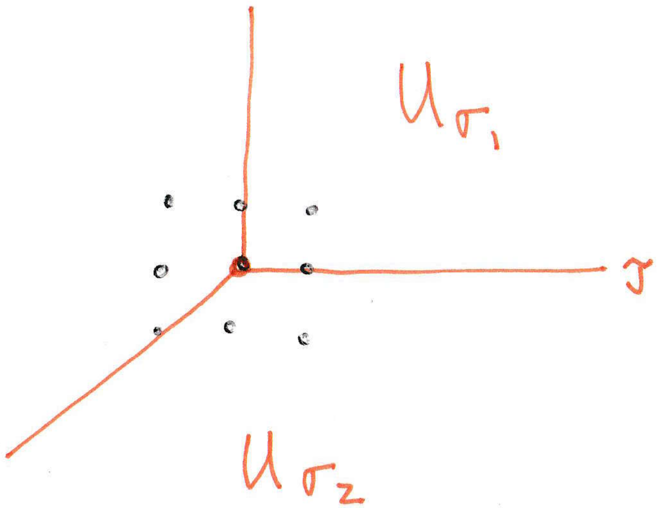
donde $U_{\sigma_1\sigma_2}$ es el abierto principal de U_{σ_2} isomorfo a $U_{\sigma_1\cap\sigma_2}$

ver lema anterior.

(3) Isomorfismos $g_{\sigma_1\sigma_2}$:

$$\begin{tikzcd} U_{\sigma_1\sigma_2} \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, shift right=3, "\#"] & & U_{\sigma_2\sigma_1} \\ & U_{\sigma_1\cap\sigma_2} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Ejemplo: $\mathbb{P}^2$ como viedad tórica. En cada cono σ dibujemos el álgebra correspondiente junto con las inclusiones naturales (Nota que este es un diagrama conmutativo).



$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}[x^{-1}, x^{-1}y] \arrow[r] \arrow[dd] & \mathbb{C}[x^{\pm}, y] \arrow[d] & \mathbb{C}[x, y] \arrow[l] \arrow[d] \\
& \mathbb{C}[x^{\pm}, y^{\pm}] & \mathbb{C}[x, y^{\pm}] \arrow[l] \\
\mathbb{C}[xy^{-1}, x^{-1}y, y^{-1}] \arrow[ur] & & \mathbb{C}[y^{-1}, xy^{-1}] \arrow[ll] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$$U_{\sigma_2\sigma_1} = \operatorname{Spec}\left(\mathbb{C}[x,y]_{\chi}\right)$$ — testigo para $\sigma_2 \cap \sigma_1 = \tau$ (por ejemplo y) $\{y \neq 0\}$

$$\Big\downarrow g_{\sigma_2\sigma_1}$$

$$U_{\sigma_1\sigma_2} = \operatorname{Spec}\left(\mathbb{C}[y^{-1}, xy^{-1}]_{\chi}\right)$$ — testigo para $\sigma_1 \cap \sigma_2 \leq \sigma_2$ $\{y^{-1} \neq 0\}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}[x,y]_y \arrow[d] \\
\mathbb{C}[x, y, y^{-1}] \\
\mathbb{C}[y^{-1}, xy^{-1}]_{y^{-1}} \arrow[u] \arrow[uu, bend left, "g_{\sigma_2\sigma_1}"]
\end{tikzcd}$$

* <u>Ejercicio:</u> Sea Δ un abanico racional en $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.
Demuestre que los datos de pegamento dados por el abanico satisfacen los axiomas de pegamento luego $X(\Delta)$ esta bien definida.

<u>Ejercicio:</u> Demuestre que para todo abanico racional Δ tenemos que:

(1) $X(\Delta)$ es normal e irreducible

(2) $U_{\{0\}} =: T$ es un abierto de $X(\Delta)$ isomorfo al toro $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[M])$

(3) Existe una accion $\psi : T \times X(\Delta) \longrightarrow X(\Delta)$
que extiende a la accion de T en si mismo por multiplicacion.
(Nota $T \times X(\Delta)$ es el resultado de pegar los productos
$T \times U_\sigma := \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[M] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M])$)

Por eso $X(\Delta)$ se llama la variedad torica del abanico Δ.