Vector bundles, ~~sheaves~~ y el grupo de Picard:

Def: Una variedad (V,π) es un haz vectorial de rango r sobre X si $\pi : V \longrightarrow X$ es morfismo, V es variedad y se cumplen las siguientes condiciones: ~~tal que~~

$\exists$ cubierta $\{U_i\}_{i\in I}$ $\quad \bigcup_{i\in I} U_i = X$, U_i abiertos:

① $\forall i\ \exists\ \phi_i : \pi^{-1}(U_i) \xrightarrow[\text{isomorfismo}]{\cong} U_i \times \mathbb{C}^r \quad (\pi_1 \circ \phi_i = \pi)$

② $\forall i,j$

$$\begin{tikzcd}
 & U_i\cap U_j \times \mathbb{C}^r \\
\pi^{-1}(U_i\cap U_j) \arrow[ur, "\phi_i"] \arrow[dr, "\phi_j"'] \arrow[r, phantom, "\#"] & \\
 & U_i\cap U_j \times \mathbb{C}^r \arrow[uu, "\mathrm{id}\times g_{ij}"']
\end{tikzcd}$$

desde j hacia i

$g_{ij} \in GL(\mathcal{O}_X(U_i\cap U_j))$

Obs: ⓐ $\{(U_i,\phi_i)\}$ se llaman trivializaciones del haz

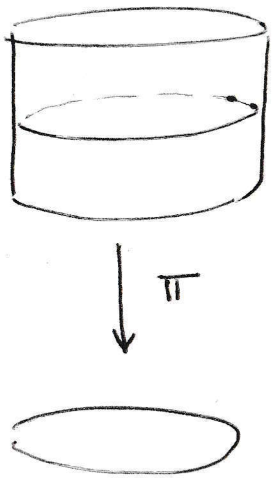
ⓑ
$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(p) \arrow[r, "\phi_i"] \arrow[d, "\phi_j"'] & p\times\mathbb{C}^r \arrow[dl, "\text{isomorfismo}"] \\
p\times\mathbb{C}^r &
\end{tikzcd}$$

así que $\pi^{-1}(p)$ tiene estructura de $\mathbb{C}$-espacio vectorial de rango (dim) r

Ejemplo 1: En top: $X = S^1$

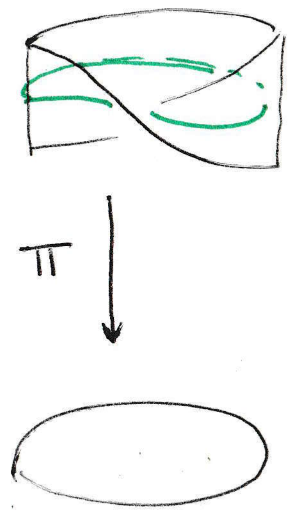
(a)

V_1



π

(b)



V_2

π

$\boxed{\text{Ejercicio:}}$

(1) Construya trivializaciones de la banda de Moebius infinita $/ S^1$.

(2) Demuestre que
$$V \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$$
$$\shortparallel \; \{([\vec{u}], \vec{v}) : \exists \lambda \;\; \vec{v} = \lambda \vec{u}\}$$
es un haz vectorial de rango 1 en $\mathbb{P}^n$.

Ejemplo 2:

$$V \subseteq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2$$

$[v] = [a:b]$

$$\shortparallel \; \left\{ ([a:b], \vec{v}) : \det \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ a & b \end{vmatrix} = 0 \right\}$$

$$V \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{P}^1$$

Af: (V, π_1) es un haz $/ \mathbb{P}^1$.

$$\vec{v} = (v_1, \underset{\substack{\shortparallel \\ v_1 \frac{b}{a}}}{v_2})$$

Dem: $\mathbb{P}^1 = U_a \cup U_b$

$$\begin{array}{ccccc} V & & V \cap \pi_1^{-1}(U_a) & \xrightarrow{\phi_1} & U_a \times \mathbb{C} \\ \pi_1 \downarrow & & \pi_1 \downarrow & & \\ \mathbb{P}^1 & \supseteq & U_a & & \end{array}$$

$([a:b], \vec{v}) \mapsto ([a:b], \underset{\substack{\shortparallel \\ v_1}}{\lambda})$

(v_1, v_2)

$\vec{v} = \lambda (1, \frac{b}{a})$

ϕ_2

si $b \neq 0$

$([a:b], v_2)$

Af:

$([a:b], (v_1, v_2))$

$$\pi_1^{-1}(U_a \cap U_b) \xrightarrow{\phi_1} ([a:b], v_1)$$
$$\pi_1^{-1}(U_a \cap U_b) \xrightarrow{\phi_2} ([a:b], v_2)$$

$([a:b], v_2 \frac{a}{b})$

$\#$

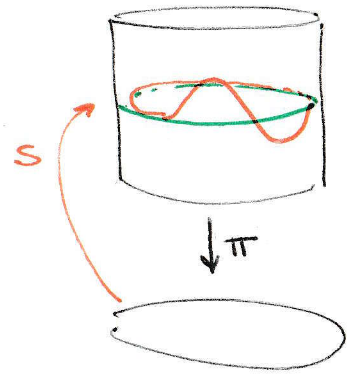
$GL(O_X(U_a \cap U_b))$

$$v_2 \cdot d = v_1$$
$$\shortparallel$$
$$\frac{a}{b} v_2$$

$\Rightarrow d = \frac{a}{b}$

$$\vec{v} = (\underset{\substack{\shortparallel \\ v_1}}{\tfrac{a}{b} v_2}, v_2)$$

Def: Una sección de V en $U \subseteq X$ ~~es~~ un morfismo $s : U \longrightarrow V$ tal que $\pi \circ s = id$.



Una sección de V en X se llama una sección global.

Obs: Las secciones de V arriba de U forman un módulo sobre $\mathcal{O}_X(U)$, como se ve de la descripción de las secciones localmente; es decir:

$$U = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap U),$$

cubierta

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_i \cap U) \arrow[r, "\phi_i"] \arrow[dr, "\phi_j"'] \arrow[d] & (U_i \cap U) \times \mathbb{C} \\
U_i \cap U \arrow[u, bend left, "s_i"] & (U_j \cap U) \times \mathbb{C} \arrow[u, "id \times g_{ij}"']
\end{tikzcd}$$

$$\phi_i \circ s(x) =: s_i(x) = (x, h_i(x))$$
$$\phi_j \circ s(x) =: s_j(x) = (x, h_j(x))$$

Teorema: $s \in \Gamma(V, X)$ se especifica mediante $(h_1, \dots, h_n)$ funciones regulares en U_i con

$$\boxed{g_{ij}(x)\, h_j(x) = h_i(x)}$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{c} V \subseteq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2 \\ \downarrow \\ \mathbb{P}^1 \end{array} \qquad g_{01}([a:b]) = \frac{a}{b}.$$

$$U_0 \xrightarrow{h_0} \mathbb{C} \qquad h_0\left(\frac{x_1}{x_0}\right), \qquad h_1\left(\frac{x_0}{x_1}\right)$$

$$U_1 \xrightarrow{h_1} \mathbb{C}$$

$$\frac{x_0}{x_1} h_1\left(\frac{x_0}{x_1}\right) = h_0\left(\frac{x_1}{x_0}\right)$$

$$z\, h_1(z) = h_0\left(\frac{1}{z}\right) \rightsquigarrow \text{Ambas son cero!}$$

así que V no tiene secciones globales!

Def: Si X es irreducible decimos que (V, π) tiene una sección racional s si $\exists\ U \subseteq X$, $U \neq \emptyset$ y $s : U \to V$ sección regular. Identificamos dos secciones racionales si coinciden en algún abierto no vacío.

Ejemplo:

$$U_0 \xrightarrow{h_0 = 1} \mathbb{C} \qquad h_1\left(\frac{x_0}{x_1}\right) = g_{10}([x_0:x_1])\, h_0(x)$$

$$U_1 \xrightarrow{h_1} \mathbb{C} \qquad h_1\left(\frac{x_0}{x_1}\right) = \frac{x_1}{x_0} \cdot 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{h_1\left(\frac{x_0}{x_1}\right) = \left(\frac{x_0}{x_1}\right)^{-1}} \longleftarrow \text{racional!, no regular en } U_1 \\ h_0\left(\frac{x_1}{x_0}\right) = 1 \end{array} \right.$$

Construcción:

A cada haz de línea (line bundle) le asociaremos un divisor $D \in \mathrm{Div}(X)$. Esta asociación no es única pero sí lo es módulo equivalencia lineal en X.

Tomemos una n-tupla de funciones racionales $\vec{h} = (h_1, \ldots, h_n)$ que satisfacen $\boxed{h_i(x) = g_{ij}(x)\, h_j(x)}$

Si $D \subseteq X$ es un divisor primo con $D \cap U_i \neq \emptyset$

$\nu_D(h_i)$ — multiplicidad de D

$$E = \sum_{D:\, \mathrm{codim}(D,X)=1} \nu_D(h_i)\, [D]$$

Af: Está bien definida pues si $D \cap U_i \neq \emptyset$ y $D \cap U_j \neq \emptyset$ tenemos en $U_i \cap U_j$

$$h_i(x) = g_{ij}(x)\, h_j(x)$$

$$\nu_D(h_i) = \cancel{\nu_D(g_{ij})} + \nu_D(h_j)$$

0

El divisor depende de $\vec{h}$, si tuviéramos otra $\vec{f}$ ¿qué pasaría?

$$\boxed{\begin{array}{l} h_i(x) = g_{ij}(x)\, h_j(x) \\ f_i(x) = g_{ij}(x)\, f_j(x) \end{array}} \Rightarrow \frac{h_i}{f_i} = \frac{h_j}{f_j} = t$$

dividiendo

función racional indep de j !!

$\forall i \quad h_i = f_i t \Rightarrow$ $\mathrm{div}(h_i) = \mathrm{div}(f_i) + \mathrm{div}(t)$

$\boxed{E_{\vec{h}} \sim E_{\vec{f}}}$ ✓

Sea X una variedad normal.

Def: Si $E \in \mathrm{Div}(X)$ y $U \subseteq X$ es abierto

$$E = \sum_{\substack{A \subseteq X \\ \mathrm{codim}(A,X)=1}} c_A A$$

restricción

$$E|_U := \sum_{\substack{A \subseteq X \\ \mathrm{codim}(A,X)=1 \\ A \cap U \neq \emptyset}} c_A A$$

Divisores de Weil

(localmente principal)

Def: $E \in \mathrm{Div}(X)$ es un divisor de Cartier si $\exists \{U_i\}_{i \in I}$ y $f_i \in \mathbb{C}(X)$:

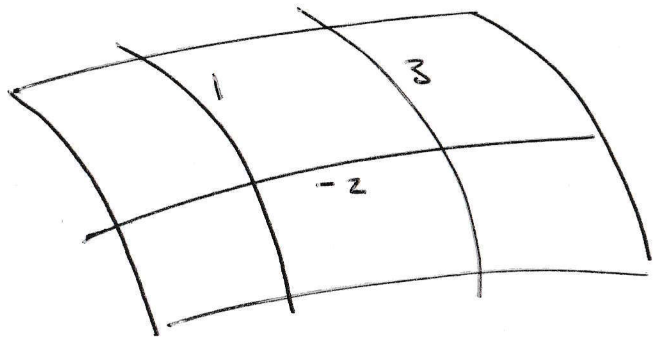
$$\boxed{E|_{U_i} = \mathrm{div}(f_i)|_{U_i}} \quad \forall i$$

Como vimos toda sección racional de un haz de línea (V, π) define un divisor de Cartier

$$\mathrm{CaDiv}(X) = \{ E \in \mathrm{Div}(X) : E \text{ es de Cartier} \}$$

Ejercicio: Demuestre que $\mathrm{PDiv}(X) \subseteq \mathrm{CaDiv}(X) \subseteq \mathrm{Div}(X)$ y que esta es una cadena de subgrupos aditivos.

Recíprocamente, cualquiera de los divisores que construimos nos permite recuperar el haz de línea! si X normal



Como $E \in Div(X)$ es localmente principal entonces existen abiertos $U_i \subseteq X$: $E \cap U_i = div(f_i)_{|U_i}$

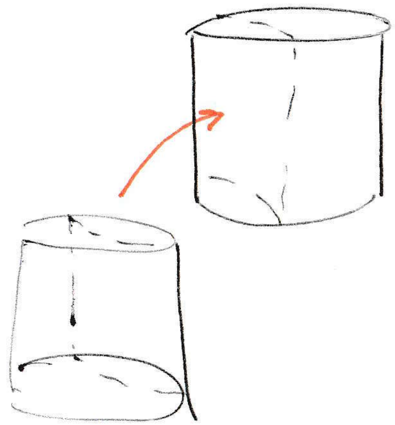
en $U_i \cap U_j$ tenemos que $div(f_j)_{|U_i \cap U_j} = E \cap U_i \cap U_j = div(f_i)_{|U_i \cap U_j}$

definimos $g_{ij} = \frac{f_i}{f_j}$ Afi: $g_{ij} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$

pq $\boxed{div\left(\frac{f_i}{f_j}\right)\Big|_{U_i \cap U_j} = 0}$ así que $\frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap U_j)$

Vamos a construir un haz con los $g_{ij} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^*$.

mediante pegamento.



Abiertos $\{ \cancel{f} U_i \times \mathbb{C} \ : \ i=1,\dots,N \}$

$$U_j \times \mathbb{C} \supseteq U_{ij} := U_i \cap U_j \times \mathbb{C}$$

$$U_{ij} \xrightarrow{id \times g_{ij}} U_{ji}$$

$$\boxed{g_{kj}\, g_{ji} = \frac{f_k}{\cancel{f_j}} \cdot \frac{\cancel{f_j}}{f_i} = g_{ki}}$$

así que los pegamentos son compatibles.

La variedad V, obtenida de pegar los $U_i \times \mathbb{C}$, es un haz vectorial (de línea) sobre X.

Más aún $(f_1, \dots, f_n)$ son una sección racional de V

porque $$g_{ij} f_j = \left(\frac{f_i}{\cancel{f_j}}\right)\cancel{f_j} = f_i$$

así que E es divisor de una sección racional de V.

Teorema: Sea X una variedad normal irreducible.
Hay una correspondencia biyectiva entre

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Haces de línea} \\ V \xrightarrow{\pi} X \end{array} \right\} \Big/ \text{isom} \longleftrightarrow CaDiv(X) \big/ \sim$$

equivalencia lineal

Def: Sea X una variedad normal irreducible

$$Pic(X) = CaDiv(X)\big/\sim \;\leq\; Cl(X)$$

subgrupo del class group de X
y en particular f.g.
si $X = X(\Delta)$.

Problema: ¿Determinar $CaDiv(X) \leq Div(X)$
$Pic(X)$ para $X = X(\Delta)$?

~~10~~ Ejercicios: $\pi' : W \longrightarrow X$

(I) Sean $\pi : V \longrightarrow X$ ~~un~~ hazes vectorial y sean $\{U_i\}_{i=1}^{N}$ una cubierta por abiertos trivializantes con cociclos

$$g_{ij} \in GL(r, \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j))$$
$$s_{ij} \in GL(r, \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j))$$

(a) Use los cociclos para definir haces vectoriales

$$\mathrm{Hom}(W, V), \quad W^{\vee} \text{ — (el dual de } W)$$
$$W \otimes V, \quad W \oplus V$$

(b) Sea $\varphi : X \longrightarrow Y$ un morfismo de variedades y sea $\pi : W \longrightarrow Y$ un haz vectorial. Defina un pull-back $\varphi^*(W)$, haz vectorial en X.

(II) (a) Demuestre que todo haz ~~vectorial~~ de línea en $\mathbb{P}^n$ es isomorfo a $\underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{k \text{ veces}}$ ó a $\underbrace{V^{\vee} \otimes V^{\vee} \otimes \cdots \otimes V^{\vee}}_{s\text{-veces}}$.

(b) Cuál es la dimensión del espacio de secciones globales de cada haz de línea en $\mathbb{P}^n$?